УДК 519.6

В.П. Карашецький, В.І. Яркун

РОЗРАХУНОК ТРИВИМІРНИХ СТАЦІОНАРНИХ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Анотація. У статті описано чіткий алгоритм формування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь виходячи з мінімуму функціонала для розрахунку розподілу температури в тривимірній області з безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами. Сформульовано краєву задачу розрахунку тривимірного стаціонарного потенціального температурного поля. Побудовано скінченно-елементну модель розрахунку розподілу температури всередині тривимірної області, заповненої безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами. Виведені основні формули методу скінченних елементів для краєвої задачі розрахунку тривимірних стаціонарних потенціальних теплових полів в областях з безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами використовуючи лагранжеві тетраедри 1 – 4 порядків в якості скінченних елементів, та кубатурні формули чисельного інтегрування за об'ємом лагранжевого тетраедра. Запропоновано алгоритм визначення вкладу скінченного елемента у вектор нев'язок та матрицю Якобі нелінійної системи рівнянь, яку розв'язують методом Ньютона використовуючи елементи тензора диференціальної теплопровідності середовища. Застосовано кубатурну формулу чисельного інтегрування за об'ємом лагранжевого тетраедра на базі інтерполяційного повного поліному для лагражевого тетраедра першого порядку. Даний алгоритм придатний при використанні лагранжевих скінченних елементів другого, третього та четвертого порядків із застосуванням відповідних кубатурних формул чисельного інтегрування за об'ємом лагранжевого тетраедра. Наведено формули для обчислення тензорів диференціальної теплопровідності для нелійного ізотропного та лінійного середовищ. Описані граничні умови Діріхле (першого роду), Неймана (другого роду), третього і четвертого роду та їх врахування.

Ключові слова: потенціальне теплове поле, лагранжевий тетраедр, метод скінченних елементів, кубатурна формула, граничні умови, метод Ньютона.

Abstract. The article describes a clear algorithm for forming a system of nonlinear algebraic equations from the condition of the minimum of the functional to calculate the temperature distribution inside the three-dimensional domain filled with hysteresis-free nonlinear anisotropic environments. The boundary value problem of calculating the three-dimensional stationary potential temperature field is formulated. The finite element model for calculating the temperature distribution inside a three-dimensional domain filled with hysteresis-free nonlinear anisotropic environments is built. Basic formulas of the finite element method for the boundary value problem of calculating three-dimensional stationary potential thermal fields in domains filled with hysteresis-free nonlinear anisotropic environments with using Lagrangian tetrahedrons 1– 4 orders as finite elements and cubature formulas of numerical integration over the volume of the Lagrangian tetrahedron are derived. The algorithm determining the contribution of each finite element to the vector of residuals and matrix Jacobi nonlinear system of equations solved by Newton's method using the elements of the tensor of the differential thermal conductivity of the environment was considered. The cubature formula of numerical integration over the volume of the Lagrangian tetrahedron based on the interpolation complete polynomial for the Lagrangian finite element of the first order was applied. This algorithm is suitable when using Lagrangian finite elements of the second, third, and fourth orders with the use of the corresponding cubature formulas for numerical integration over the volume of the Lagrangian tetrahedron. Formulas for calculating tensors of differential thermal conductivity for non-linear isotropic and linear environments are given. The boundary conditions of Dirichlet (first kind), Neumann (second kind), third and fourth kind and their consideration are described.

Keywords: potential thermal field, Lagrangian tetrahedron, finite element method, cubature formula, boundary conditions, Newton's method.

DOI: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2024-59-1-139-145.

Вступ

Не зважаючи на велику кількість публікацій з методу скінченних елементів (МСЕ), у них відсутній чіткий алгоритм формування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для розрахунку розподілу температури в тривимірній області з безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами.

З метою підвищення точності розрахунків актуальним завданням залишається теж використання лагранжевих тетраедрів 1 – 4 порядків в якості скінченних елементів (СЕ) [8].

Актуальність

В ході дослідження були розглянуті розв'язання деяких задач розрахунку теплових процесів МСЕ в різних пристроях [1 – 6]. Деякі з цих задач володіють геометричною симетрією, що дозволяє використовувати для їх опису дві, а не три просторові координати. Однак в багатьох задачах такої симетрії не має, тому потрібна їх тривимірна постановка [7].

Отримано формули МСЕ для краєвої задачі розрахунку тривимірних стаціонарних потенціальних теплових полів в областях з безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами використовуючи лагранжеві тетраедри 1 – 4 порядків в якості СЕ, кубатурні формули чисельного інтегрування. Розглянуто алгоритм визначення вкладу СЕ у вектор нев'язок та матрицю Якобі нелінійної системи рівнянь, яка розв'язується методом Ньютона.

Мета

Мета роботи полягає в розробленні методики розрахунку тривимірних статичних температурних полів МСЕ, яка б дала можливість врахувати розподіл температури всередині тривимірної області, заповненої безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами.

Виклад основного матеріалу

Для краєвої задачі розрахунку статичного потенціального теплового поля, яка описується рівняннями

$$div\overline{B}(\overline{H}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\overline{H} = -gradU\,, \tag{2}$$

у тривимірній області D функціонал F представляється у вигляді

$$F = \int_V WdV\,, \tag{3}$$

де
$$W = \int_0^{\overline{B}} \overline{B}d\overline{H}\,; \tag{4}$$

U – температура в області D; $\overline{H}$, $\overline{B}$ – вектори напруженості теплового поля та густини теплового потоку в області D; V – об’єм області D.

Оптимальний розподіл температури U у межах тривимірної області D, яка мінімізує функціонал F, дозволяє вирішити поставлену краєву задачу. Умова мінімуму функціонала (3) приймає вигляд

$$\frac{dF}{dU} = 0\,. \tag{5}$$

Для побудови скінченно-елементної моделі заповнимо область розрахунку D сукупністю лагранжевих тетраедрів n-го порядку [9].

Нехай внаслідок тріангуляції тривимірної області D отримуємо M лагранжевих скінченних елементів. Кожному з них присвоїмо порядковий номер m ($m = \overline{1, M}$) і локальну нумерацію вузлів, згідно якої i-ому вузлу m-го СЕ відповідає номер mi. Для всієї області розрахунку встановимо сіткову (наскрізну) нумерацію R внутрішніх вузлів і G граничних вузлів. Поточні значення порядкових номерів внутрішніх вузлів позначимо r.

Для скінченно-елементної області функціонал F з урахуванням (3), (4) набуде вигляду

$$F = \sum_{m=1}^{M} F_m = \sum_{m=1}^{M} W_m\,, \tag{6}$$

де
$$W_m = \int_{v_m} Wdv\,; \tag{7}$$

v_m – об’єм m-го СЕ, який визначається за координатами його вершин у прямокутній системі координат за формулою

$$v_m = \frac{1}{6}\det\begin{Vmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & z_{m1} \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & z_{m2} \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & z_{m3} \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & z_{m4} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Утворимо R-мірний вектор-рядок і вектор-стовпець температури U у внутрішніх вузлах

$$\vec{U} = (U_1, \ldots, U_R)\,; \qquad \vec{U}_* = (U_1, \ldots, U_R)_* \tag{9}$$

Умова мінімуму функціонала F з врахуванням (5) рівносильна нелінійній системі алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\varphi}_*[\vec{U}_*] = \frac{dF}{d\vec{U}_*} = 0\,. \tag{10}$$

Застосуємо для (7) кубатурні формули чисельного інтегрування за об’ємом лагранжевого тетраедра [12]. Наприклад, для лагранжевих тетраедрів першого порядку (n =1), кількість вузлів у яких p =4, одержимо

$$F_m = \frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} W_{mi} , \tag{11}$$

де

$$W_{mi} = \int_0^{\overline{H}_{mi}} \overline{B} d\overline{H} ; \tag{12}$$

Представимо залежність температури U в межах m -го СЕ повним поліномом першого степеня

$$U = \vec{U}_m k_m^{-1} \vec{k}_* = \vec{k} k_{m*}^{-1} \vec{U}_{m*} , \tag{13}$$

де

$$\vec{U}_m = (U_{m1},...,U_{m4}) \tag{14}$$

– вектор-рядок значень температури U у вузлах m -го СЕ;

$$\vec{k} = (1, x, y, z) \tag{15}$$

– координатний вектор-рядок поточної точки з координатами x , y , z ;

$$k_{m*} = \begin{Vmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & z_{m1} \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & z_{m2} \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & z_{m3} \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & z_{m4} \end{Vmatrix} \tag{16}$$

– координатна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (15) у вузлах m -го СЕ;

– $\vec{U}_{m*}$, $\vec{k}_*$, k_m – відповідно вектори-стовпці і матриця, транспоновані по відношенню до $\vec{U}_m$, $\vec{k}$, k_{m*} .

В локальній прямокутній системі координат вектор $\overline{H}$ напруженості теплового поля визначається через температуру U співвідношенням

$$\overline{H} = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} . \tag{17}$$

Проекції H_x , H_y , H_z вектора $\overline{H}$ в mi -ому вузлі з врахуванням (13) і (17) отримують вигляд

$$H_{xmi} = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = -\vec{U}_m \vec{K}_{mi*}^{(x)} = -\vec{K}_{mi}^{(x)} \vec{U}_{m*} ; \tag{18}$$

$$H_{ymi} = -\frac{\partial U}{\partial y}\Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = -\vec{U}_m \vec{K}_{mi*}^{(y)} = -\vec{K}_{mi}^{(y)} \vec{U}_{m*} ; \tag{19}$$

$$H_{zmi} = -\frac{\partial U}{\partial z}\Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = -\vec{U}_m \vec{K}_{mi*}^{(z)} = -\vec{K}_{mi}^{(z)} \vec{U}_{m*} , \tag{20}$$

де

$$\vec{K}_{mi}^{(x)} = \vec{k}_{mi}^{(x)} k_{m*}^{-1} ;\ \vec{K}_{mi}^{(y)} = \vec{k}_{mi}^{(y)} k_{m*}^{-1} ;\ \vec{K}_{mi}^{(z)} = \vec{k}_{mi}^{(z)} k_{m*}^{-1} ; \tag{21}$$

$$\vec{K}_{mi*}^{(x)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(x)} ;\ \vec{K}_{mi*}^{(y)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(y)} ;\ \vec{K}_{mi*}^{(z)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(z)} ; \tag{22}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(x)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial x}\Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = (0,1,0,0) ;$$

$$\vec{k}_{mi}^{(y)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial y} \Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = (0,0,1,0)\,; \tag{23}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(z)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} \Big| x_{mi}, y_{mi}, z_{mi} = (0,0,0,1)\,;$$

$\vec{k}_{mi*}^{(x)}$, $\vec{k}_{mi*}^{(y)}$, $\vec{k}_{mi*}^{(z)}$ – стовпці, одержані транспонуванням рядків (23).

Диференціюючи вираз (11) по вектору $\vec{U}_m$ і враховуючи (18) – (20), одержуємо

$$\vec{\varphi}_{m*} = \frac{dF_m}{d\vec{U}_m} = \frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \frac{d}{d\vec{U}_m} \int_0^{\overline{H}_{mi}} (d\overline{H})\overline{B} = \frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \frac{d\overline{H}_{mi}}{d\vec{U}_m} \overline{B}_{mi} =$$
$$= \frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_m} B_{xmi} + \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_m} B_{ymi} + \frac{dH_{zmi}}{d\vec{U}_m} B_{zmi} \right) = \tag{24}$$
$$= -\frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \left(\vec{K}_{mi*}^{(x)} B_{xmi} + \vec{K}_{mi*}^{(y)} B_{ymi} + \vec{K}_{mi*}^{(z)} B_{zmi} \right),$$

де $\overline{B}_{mi}$, B_{xmi}, B_{ymi}, B_{zmi} – відповідно вектор густини теплового потоку і його складові в mi-ому вузлі, які визначаються за значеннями проекцій (18) – (20) вектора напруженості теплового поля і характеристикою теплопровідності безгістерезисного нелінійного середовища, що виражається векторним рівнянням або трьома скалярними рівняннями

$$\overline{B} = \overline{B}[\overline{H}] \tag{25}$$

$$B_x = B_x[H_x, H_y, H_z];\; B_y = B_y[H_x, H_y, H_z];\; B_x = B_x[H_x, H_y, H_z]\,. \tag{26}$$

Нелінійна система рівнянь (10) розв’язується, як правило, ітераційним методом Ньютона.

Для визначення вкладу m-го СЕ в систему рівнянь (10) необхідно:

– знайти вектор $\vec{\varphi}_{m*}$ на кожній ітерації за формулою (24);

– за таблицею відповідності локальної і сіткової нумерації встановити номера r вузлів, які збігаються з вузлами $m1,...,m4$;

– кожний елемент вектора $\vec{\varphi}_{m*}$, який відповідає r-ому внутрішньому вузлу, внести відповідно в r-е рівняння системи (10).

Повну систему рівнянь (10) одержимо, виконавши дану процедуру для всіх M елементів. Викладену процедуру використовуємо на етапі формування вектора нев’язок. Більш складною операцією є формування для векторної функції $\vec{\varphi}_* = (\varphi_1,...,\varphi_R)_*$ матриці Якобі ϕ розмірності R х R. Виведемо вирази, які будуть використовуватись для цієї операції.

Диференціюючи вираз (24) за вектором $\vec{U}_{m*}$, отримуємо матрицю ϕ_m розмірності 4 х 4:

$$\phi_m = \frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{U}_{m*}} = -\frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \left(\vec{K}_{mi*}^{(x)} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \vec{K}_{mi*}^{(y)} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}} + \vec{K}_{mi*}^{(z)} \frac{dB_{zmi}}{d\vec{U}_{m*}} \right). \tag{27}$$

З врахуванням (18) – (20), (26) і (27) маємо

$$\phi_m = -\frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \Big(\vec{K}_{mi*}^{(x)} \Big(\mu_{xxmi} \frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \mu_{xymi} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}} + \mu_{xzmi} \frac{dH_{zmi}}{d\vec{U}_{m*}} \Big) + \vec{K}_{mi*}^{(y)} \Big(\mu_{yxmi} \frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} +$$
$$\mu_{yymi} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}} + \mu_{yzmi} \frac{dH_{zmi}}{d\vec{U}_{m*}} \Big) + \vec{K}_{mi*}^{(z)} \Big(\mu_{zxmi} \frac{dH_{xmi}}{d\vec{U}_{m*}} + \mu_{zymi} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{U}_{m*}} + \mu_{zzmi} \frac{dH_{zmi}}{d\vec{U}_{m*}} \Big)\Big) = \tag{28}$$
$$\frac{1}{4} v_m \sum_{i=1}^{4} \Big(\vec{K}_{mi*}^{(x)} \big(\mu_{xxmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} + \mu_{xymi} \vec{K}_{mi}^{(y)} + \mu_{xzmi} \vec{K}_{mi}^{(z)} \big) + \vec{K}_{mi*}^{(y)} \big(\mu_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} + \mu_{yymi} \vec{K}_{mi}^{(y)} + \mu_{yzmi} \vec{K}_{mi}^{(z)} \big) +$$
$$\vec{K}_{mi*}^{(z)} \big(\mu_{zxmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} + \mu_{zymi} \vec{K}_{mi}^{(y)} + \mu_{zzmi} \vec{K}_{mi}^{(z)} \big) \Big),$$

де $\mu_{jkmi}(j,k=x,y,z)$ – елементи тензора диференціальної теплопровідності середовища

$$\mu=\frac{d\bar{B}}{d\bar{H}}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} & \frac{\partial B_x}{\partial H_z}\\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} & \frac{\partial B_y}{\partial H_z}\\ \frac{\partial B_z}{\partial H_x} & \frac{\partial B_z}{\partial H_y} & \frac{\partial B_z}{\partial H_z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz}\\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz}\\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz}\end{Bmatrix}, \tag{29}$$

обчислювані в i -ому вузлу m -го СЕ.

Для безгістерезисного середовища на основі теореми взаємності [10] $\mu_{xy}=\mu_{yx}$, $\mu_{xz}=\mu_{zx}$, $\mu_{yz}=\mu_{zy}$, тому $\mu_{xymi}=\mu_{yxmi}$, $\mu_{xzmi}=\mu_{zxmi}$, $\mu_{yzmi}=\mu_{zymi}$.

Для ізотропного нелінійного середовища тензор диференціальної теплопровідності визначається за формулою [11]

$$\mu=\begin{Bmatrix}\mu_\rho\cos^2\eta_x+\mu_\tau\sin^2\eta_x & (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_x\cos\eta_y & (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_x\cos\eta_z\\ (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_y\cos\eta_x & \mu_\rho\cos^2\eta_y+\mu_\tau\sin^2\eta_y & (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_y\cos\eta_z\\ (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_z\cos\eta_x & (\mu_\rho-\mu_\tau)\cos\eta_z\cos\eta_y & \mu_\rho\cos^2\eta_z+\mu_\tau\sin^2\eta_z\end{Bmatrix}, \tag{30}$$

де $\mu_\rho=\frac{dB}{dH}$, $\mu_\tau=\frac{B}{H}$ – відповідно радіальна диференціальна і тангенціальна теплопровідність середовища; $\eta_l(l=x,y,z)$ – кути між вектором $\bar{H}$ або $\bar{B}[\bar{H}]$ і відповідно ортами $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ локальної декартової системи координат.

У випадку лінійного ізотропного середовища $\mu_\rho=\mu_\tau=\frac{B}{H}=\mu_s$, тому тензор диференціальної теплопровідності набуває вигляду

$$\mu=\begin{Bmatrix}\mu_s & 0 & 0\\ 0 & \mu_s & 0\\ 0 & 0 & \mu_s\end{Bmatrix}. \tag{31}$$

Для визначення вкладу m -го СЕ в матрицю Якобі ϕ, необхідно обчислити матрицю ϕ_m на кожній ітерації за формулою (28) і підсумувати всі її елементи з відповідними елементами матриці ϕ, враховуючи, що елемент ϕ_{mij} належить ns -й клітині матриці ϕ, де n, s – сіткові номери вузлів з локальними номерами mi і mj.

Повну матрицю Якобі ϕ одержимо, виконавши дану процедуру для кожного з M скінченних елементів області розрахунку D.

При використанні лагранжевих тетраедрів 2-го, 3-го і 4-го порядків необхідно застосувати відповідні кубатурні формули чисельного інтегрування [12] і вивести основні залежності за вище наведеною методикою.

На поверхні S області D можуть бути задані граничні умови [13] різного роду:

● на поверхні S або її частині задано значення температури U (граничні умови Діріхле або першого роду);

● на поверхні S або її частині задані граничні умови Неймана або другого роду

$$H_n=-\frac{\partial U}{\partial n}=0, \tag{32}$$

де H_n – нормальна складова вектора $\bar{H}$ на одиничний ветор $\bar{n}$ зовнішньої нормалі до поверхні S ;

● на поверхні S або її частині задана лінійна комбінація температури і теплового потоку (граничні умови третього роду)

$$\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \alpha (U - U_c) = 0 , \tag{33}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; U_c – температура навколишнього середовища;

● на поверхні S або її частині у випадку її ідеального контакту з іншою областю з температурою U_1 на границі та теплопровідністю μ_1 задано рівність температур та теплових потоків (граничні умови четвертого роду)

$$U = U_1 ; \ \mu \frac{\partial U}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} . \tag{34}$$

Висновки

1. Сформульовано краєву задачу розрахунку тривимірного стаціонарного потенціального температурного поля.
2. Побудовано скінченно-елементну модель розрахунку розподілу температури всередині тривимірної області, заповненої безгістерезисними нелінійними анізотропними середовищами.
3. Застосовано кубатурну формулу чисельного інтегрування за об’ємом лагранжевого тетраедра на базі інтерполяційного повного поліному для лагражевого тетраедра першого порядку.
4. Отримано систему нелінійних алгебраїчних рівнянь з умови мінімуму функціонала, яку часто розв’язують ітераційним методом Ньютона.
5. Запропоновано алгоритм визначення вкладу внутрішнього СЕ у вектор нев’язок і матрицю Якобі нелінійної системи рівнянь використовуючи елементи тензора диференціальної теплопровідності середовища.

Список літератури

[1] J. Faiz, E. Mazaheri, “An overview of thermal modelling techniques for permanent magnet machines,” *IET Science, Measurement & Technology*, 2022.

[2] K T Prajwal, P. Bhat, “Thermal analysis of a Thermoelectric Generator (TEG) using FEM technique.” *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2021.

[3] F. Petresevics, B. Nagy, “FEM-Based Evaluation of the Point Thermal Transmittance of Various Types of Ventilated Façade Cladding Fastening Systems”, *Buildings*, 2022.

[4] D. Jindra, P. Hradil, J. Kala, V. Salajka, “Non linear FEM analysis of composite concrete slab exposed το extreme thermal load”, *AIP Conference Proceedings*, 2020.

[5] T. L. Ponsati, A. S. Bahman, F. Iannuzzo, “Thermal Modeling of Large Electrolytic Capacitors Using FEM and Considering the Internal Geometry”, *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2020.

[6] A. Y. Boukounacha, B. Zegnini, Y. Belkacem, S. Tahar, “The Effect of Temperature on the Thermal Conductivity of Transformer Oils Using the Finite Element Method”, *1st International Conference on Materials Sciences and Applications "ICMSA2023"*, Khenchela, Algeria, 2023.

[7] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge University Press, 1996.

[8] R. H. Gallagher, *Finite element analysis. Fundamentals*, Pearson College Div; First Edition, 1975.

[9] L. J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, J. Wiley & Sons, 1984.

[10] P. Silvester, H. S. Cabayan, B. T. Browne, “Efficient techniques for finite element analysis of electric machines”, *JEEE Trans*. PAS, 92, № 4, p. 1274 – 1281.1973.

[11] Р.В. Дышовый *Расчет статического магнитного поля в неявнополюсных электрических машинах дифференциальным сеточным методом*. Автореф. дисс. канд. техн. наук., Львов, 1983.

[12] В.П. Карашецький “Кубатурні формули чисельного інтегрування за об’ємом тетраедра на основі інтерполяційних повних поліномів”, *Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. Праць*, Львів: НЛТУУ, вип. 17.6. – С. 258-264. 2007.

[13] С.В. Юшко, О. Є. Борщ, М.А. Юшко, *Стаціонарна теплопровідність: навч. посіб.*, Х.: НТУ “ХПІ”, 2011.

Стаття надійшла: 21.03.2024

References

[1] J. Faiz, E. Mazaheri, “An overview of thermal modelling techniques for permanent magnet machines,” *IET Science, Measurement & Technology*, 2022.

[2] K T Prajwal, P. Bhat, “Thermal analysis of a Thermoelectric Generator (TEG) using FEM technique.” *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*, 2021.

[3] F. Petresevics, B. Nagy, “FEM-Based Evaluation of the Point Thermal Transmittance of Various Types of Ventilated Façade Cladding Fastening Systems”, *Buildings*, 2022.

[4] D. Jindra, P. Hradil, J. Kala, V. Salajka, “Non linear FEM analysis of composite concrete slab exposed то extreme thermal load”, *AIP Conference Proceedings*, 2020.

[5] T. L. Ponsati, A. S. Bahman, F. Iannuzzo, “Thermal Modeling of Large Electrolytic Capacitors Using FEM and Considering the Internal Geometry”, *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2020.

[6] A. Y. Boukounacha, B. Zegnini, Y. Belkacem, S. Tahar, “The Effect of Temperature on the Thermal Conductivity of Transformer Oils Using the Finite Element Method”, *1st International Conference on Materials Sciences and Applications "ICMSA2023"*, Khenchela, Algeria, 2023.

[7] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge University Press, 1996.

[8] R. H. Gallagher, *Finite element analysis. Fundamentals*, Pearson College Div; First Edition, 1975.

[9] L. J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, J. Wiley & Sons, 1984.

[10] P. Silvester, H. S. Cabayan, B. T. Browne, “Efficient techniques for finite element analysis of electric machines”, *JEEE Trans*. PAS, 92, № 4, p. 1274 – 1281.1973.

[11] R.V. Dyshovyy, *Raschet statycheskoho mahnytnoho polya v neyavnopolyusnykh élektrycheskykh mashy-nakh dyfferentsyal'nym setochnym metodom*. Avtoref. dyss. kand. tekhn. nauk., L′viv, 1983.

[12] Karashets′kyy V.P. “Kubaturni formuly chysel′noho intehruvannya za ob″yemom tetraedra na osnovi interpolyatsiynykh povnykh polinomiv*” Nauk. visnyk NLTU Ukrayiny: Zb. nauk.-tekhn. prats'.* – L′viv: NLTUU. – 2007, vyp. 17.6. – S. 258-264.

[13] S.V. Yushko, O. YE. Borshch, M.A. Yushko, *Statsionarna teploprovidnist': navch. posib.*, KH.: NTU “KHPI”, 2011.

Відомості про авторів

Карашецький Володимир Петрович, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Національного лісотехнічного університету України

Karashetskyy Volodymyr Petrovych, candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Software Engineering of the Ukrainian National Forestry University

Яркун Володимир Ігорович, старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення Національного лісотехнічного університету України

Yarkun Volodymyr Ihorovych, senior lecturer of the Department of Software Engineering of the Ukrainian National Forestry University

CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL STATIONARY POTENTIAL THERMAL FIELDS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Ukrainian National Forestry University