

УДК 519.876.5

М.П. ДИВАК, А.В. ПУКАС, І.С. ОЛІЙНИК

Тернопільський національний економічний університет

**ОСОБЛИВОСТІ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ІЗ ВИДІЛЕННЯМ «НАСИЧЕНОГО БЛОКУ»**

**Анотація.** Параметрична ідентифікація є одним із етапів побудови моделей статичних систем. Одним із найбільш ефективних методів параметричної ідентифікації на основі даних з інтервальною невизначеністю є метод локалізації (апроксимації) області параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку» у базовій інтервальній системі лінійних алгебраїчних рівнянь (ИСЛАР). Метод має ряд переваг у порівнянні з існуючими, зокрема він є найкращим, за критерієм простоти оперування отриманим коридором інтервальних моделей для задач прогнозування та за критерієм мінімізації обчислювальної складності знаходження множинних оцінок параметрів моделей. Проте не дослідженими залишаються умови застосування методу. У статті показано ефективність комп'ютерної реалізації методу та досліджено умови, за яких відомі алгоритми його реалізації не дають можливість отримати розв'язок.

**Ключові слова:** інтервальна модель, метод локалізації параметрів інтервальних моделей, «насичений блок» ИСЛАР.

**Аннотация.** Параметрическая идентификация является одним из этапов построения моделей статических систем. Одним из наиболее эффективных методов параметрической идентификации на основе данных с интервальной неопределенностью есть метод локализации (аппроксимации) области параметров интервальных моделей с выделением «насыщенного блока» в базовой интервальной системе линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). Метод имеет ряд преимуществ в сравнении с существующими, в частности он является наилучшим, по критерию простоты управления полученным коридором интервальных моделей для задач прогнозирования и по критерию минимизации вычислительной сложности нахождения множественных оценок параметров моделей. Однако не исследованными остаются условия применения метода. В статье показана эффективность компьютерной реализации метода и исследовано условия, за которых известные алгоритмы его реализации не дают возможность получить решение.

**Ключевые слова:** интервальная модель, метод локализации параметров интервальных моделей, «насыщенный блок» ИСЛАУ.

**Abstract.** Parameter identification is one from the stages of construction the models of the static systems. One from the most effective methods of parameter identification based on data with an interval uncertainty there is a method of localization (approximation) the area of interval model parameters with selection the «saturated block» in the basic interval system of linear algebraic equations (ISLAE). This method has some advantages in comparison with existing methods. In particular it is the best by the criterion of simplicity of operation by corridor of interval models for the prediction tasks and by the criterion of minimization the computing complexity of finding the multiple estimations of models parameters. However the conditions of method's application are not research. There is the efficiency of computer realization the method and the conditions at which the known algorithms of its realization do not enable to get the solution are research in the article.

**Keywords:** interval model, method of localization the interval model parameters, «saturated block» of ISLAE.

**Вступ**

В теорії математичного моделювання особливе місце займає клас моделей у вигляді «чорної скриньки» з інтервальною невизначеністю на «вході» чи на «виході». Під інтервальною невизначеністю тут розуміємо встановлений замість точного числового значення змінної деякий числовий інтервал можливих значень цієї змінної. Така невизначеність може бути пов'язана із похибками вимірювань, похибками заокруглень в процесі імітаційного експерименту чи суб'єктивно встановленими інтервалами можливих значень змінних в процесі опитування експертів [1]. Чим ширший зазначений числовий інтервал, тим більша невизначеність у встановленні значення деякої змінної. Таким чином результати експерименту, за якими будують математичну модель, представляють у вигляді числових інтервалів – інтервальних даних [2], а математичну модель, яку побудовано за результатами аналізу інтервальних даних називають інтервальною моделлю. Особливістю побудованих інтервальних моделей є можливість відображення гарантованого коридору, в межах якого прогнозують значення «виходу». При побудові інтервальних моделей дослідникам доводиться розв'язувати задачі структурної та параметричної ідентифікації. Вказана проблематика описана у працях Бакана Г.М., Вошиніна О.П., Грановського В.А., Дивака М.П., Кунцевича В.М., Куржанського А.Б., Личака М.М., Шарого С.П.

При структурній ідентифікації знаходять структуру математичної моделі, а при параметричній – налаштовують її параметри, тобто шукають їх оцінки. У випадку застосування аналізу інтервальних даних отримують не точкові, а множинні оцінки параметрів моделі, які відповідно дають можливість побудувати гарантований коридор інтервальних моделей [3]. Властивості інтервальних моделей – як математичного об'єкта в достатній мірі досліджено в монографії [4]. Зокрема, в зазначеній праці встановлено, що найкращим, за критерієм простоти оперування коридором інтервальних моделей для задач прогнозування та за критерієм мінімізації обчислювальної складності знаходження множинних оцінок параметрів моделей, є метод локалізації (знаходження гарантованої області) параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку» [4].

Зазначений метод дає можливість отримати множинні оцінки параметрів інтервальних моделей у вигляді області, яка геометрично є паралелограмом (для двовимірного випадку – паралелограм) із відомим центром симетрії та відомими аналітичними виразами для вписаного чи описаного багатовимірного

еліпсоїда. Саме ці властивості множинного розв'язку задачі параметричної ідентифікації на основі інтервальних даних забезпечують простоту оперування коридором інтервальних моделей для задач прогнозування. Іншою перевагою методу локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку» є наявність простої обчислювальної схеми з високим ступенем паралелізму, яку описано за допомогою обчислювального графу [4].

Враховуючи зазначені переваги цього методу локалізації, розроблено його численні комп'ютерні реалізації для розв'язування задач моделювання та прогнозування в енергетиці, екології, медицині та технологічних галузях. Проте подальшого детального аналізу вимагають випадки, коли результати комп'ютерної реалізації методу є не прогнозованими, зокрема пов'язані із відсутністю розв'язку інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР), яка є базовою математичною задачею методу.

Метою даної праці є дослідження та встановлення умов виникнення вищезазначеної ситуації в процесі комп'ютерної реалізації методу.

### Особливості побудови інтервальних моделей

Залежність між «виходом» та «входами» статичної системи описуємо у вигляді алгебричного лінійного за невідомими параметрами рівняння [5]:

$$y_0 = \beta_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\bar{x}), \quad (1)$$

де  $y_0$  – істинне невідоме значення «виходу» системи;  $\bar{x} \in R^m$  – вектор вхідних змінних;  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$  – вектор невідомих параметрів,  $\vec{\varphi}^T(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}))^T$  – вектор відомих базисних функцій.

Результати експерименту представляємо матрицею значень вхідних змінних та вектором інтервальних значень вихідної змінної  $y$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}; [\vec{Y}] = \begin{pmatrix} [y_1^-; y_1^+] \\ \vdots \\ [y_i^-; y_i^+] \\ \vdots \\ [y_N^-; y_N^+] \end{pmatrix}; \quad (2)$$

Умовами для знаходження вектора  $\vec{\beta}$  невідомих параметрів є:

$$y_i^- \leq y_{oi} \leq y_i^+, \quad (3)$$

звідси отримуємо інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) [5]:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq y_i^+ \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_N) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_N) \leq y_N^+ \end{cases} \quad (4)$$

Множину розв'язків отриманої ІСЛАР (4) отримаємо у такому вигляді  $\Omega$ :

$$\Omega = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid \vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+ \right\}, \quad (5)$$

де  $F = \{\phi_j(\bar{x}_i), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m\}$  - відома матриця значень базисних функцій,  $\bar{Y}^- = \{y_i^-, i = 1, \dots, N\}$  та  $\bar{Y}^+ = \{y_i^+, i = 1, \dots, N\}$  - вектори, складені з верхніх та нижніх меж інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$ . Відомо, що геометрично область розв’язків ІСЛАР (4) є многогранником [3].

Довільний вектор параметрів  $\bar{b} \in \Omega$  ІСЛАР (4) породжує модель  $\hat{y}(\bar{x}) = \bar{\phi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}$ , яку надалі називатимемо інтервальною моделлю [6] (статичної системи). Разом з тим множина розв’язків  $\Omega$  породжує множину рівнозначних (з точки зору наявної інтервальної невизначеності) інтервальних моделей, кожна з яких задовольняє умовам задачі. При цьому всі інтервальні моделі належать множині (коридору):

$$[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)], \quad (6)$$

де  $\hat{y}^-(\bar{x}) = \min_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\phi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b})$  та  $\hat{y}^+(\bar{x}) = \max_{\bar{b} \in \Omega} (\bar{\phi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b})$  - нижня та верхня межі функціонального коридору.

Якщо кількість рівнянь в ІСЛАР дорівнює кількості невідомих параметрів, то область (5) – паралелопоп. Виділену із ІСЛАР (4) ІСЛАР із кількістю інтервальних рівнянь, яка співпадає із кількістю невідомих параметрів називають «насиченим блоком» [4]. Надалі матрицю значень базисних функцій для насиченого блоку будемо позначати за  $F_m$ , а область розв’язків такої системи за  $\Omega_m$ .

Область розв’язків «насиченого блоку» має ряд важливих властивостей:

1. Для насиченого блоку, тобто у випадку співпадіння кількості спостережень  $N$  в експерименті з кількістю невідомих параметрів  $m$ , матриця  $F_m$  ІСЛАР (4) – квадратна ( $m \times m$ ) і якщо вона не вироджена, то існує аналітична залежність для обчислення кожної вершини паралелопопа [4]:

$$\bar{b}_s = F_m^{-1} \cdot \bar{Y}_s \quad (7)$$

де  $\bar{Y}_s$  - вектор, складений з межових значень інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$ , наприклад, він може мати такий вигляд  $\bar{Y}_s = (y_1^+, y_2^-, y_3^+, \dots, y_N^-)$ . Слід зауважити, що таких вершин є  $R = 2^m$  [4].

2. Центр симетрії паралелопопа  $\bar{\bar{b}}$  визначаються за формулою [4]:

$$\bar{\bar{b}} = \frac{1}{2^m} \sum_{s=1}^{2^m} \bar{b}_s = F_m^{-1} \cdot \bar{\bar{Y}} \quad (8)$$

де  $\bar{\bar{Y}}$  - вектор є середнім арифметичним усіх векторів складених з межових значень, а його компоненти – середні інтервальні значення  $\bar{y}_i = (y_i^+ + y_i^-) / 2, i = 1, \dots, m$ , тобто

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{2^m} \cdot \left( \sum_{s=1}^{2^m} \bar{Y}_s \right) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)^T \quad (9)$$

3. Об’єм отриманого паралелопопа обчислюють за формулою:

$$V_{\Omega_m} = 4^m \cdot \left( \prod_{i=1}^m (y_i^+ - y_i^-)^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \quad (10)$$

Представлення області параметрів у вигляді паралелопопа, тобто «насиченого блоку», є зручним, оскільки суттєво спрощує використання множинних оцінок параметрів. Зокрема, область у вигляді паралелопопа, в свою чергу, можна представити у вигляді описаного або вписаного багатовимірних

еліпсоїдів, спираючись на твердження, наведені у праці [4]. Проте, якщо в ІСЛАР (3)  $N > m$ , то побудова вищезгаданого представлення області параметрів суттєвим чином ускладнюється. Разом з тим у праці [4] наведено метод локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку», що дає можливість апроксимувати область розв'язків ІСЛАР з  $N > m$  у вигляді паралелотопа.

Таким чином, основною математичною задачею при побудові інтервальних моделей є задача оцінювання множини розв'язків ІСЛАР, яку доцільно розв'язувати із застосуванням методу локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку». Проте у всіх реалізаціях методу припускають, що ІСЛАР є сумісною. Таке припущення не завжди відповідає практичним застосуванням. Встановлення умов, за яких метод локалізації не забезпечує розв'язку задачі є метою подальших досліджень в даній праці.

#### Метод локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку»

Розглянемо суть методу локалізації. На першому етапі реалізації методу вибираємо із ІСЛАР (4)  $m$  рівнянь, які утворюють також сумісну систему. Розв'язком цієї системи є область  $\Omega_m$ , яка геометрично має вигляд паралелотопа з вершинами (7).

Способи формування (вибору) цих рівнянь описано в праці [6]. Проте слід зауважити, що на практиці не існує строго формального підходу до вибору «насиченого блоку», який би апіорі гарантував задані властивості локалізаційної області, зокрема її мінімальні розміри. У подальших дослідженнях припустимо, що насичений блок є вибрано у той чи інший спосіб. Інтервальні рівняння, що входять в сформовану систему будемо називати базовими.

Тепер поставимо умову, щоб об'єм локалізаційної області параметрів моделей був мінімальним:

$$V_{\Omega_m} \longrightarrow \min, \quad (11)$$

з урахуванням решти  $N-m$  - інтервальних рівнянь ІСЛАР (4) та за умови включення

$$\Omega \subseteq \Omega_m. \quad (12)$$

Спираючись на формулу (10), отримуємо задачу локалізації у вигляді математичної задачі оптимізації [7]

$$4^m \cdot \left( \prod_{i=1}^m (y_i^+ - y_i^-)^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \xrightarrow{F_m} \min \quad (13)$$

за умов (12).

При відомій фіксованій матриці  $F_m$  задача локалізації (13), (12) стає еквівалентною таким задачам:

$$y_i^+ \longrightarrow \min, \quad y_i^- \longrightarrow \max, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \Omega \subseteq \Omega_m \quad (14)$$

Для розв'язування задачі локалізації (14), у праці [4] запропоновано ітераційну обчислювальну схему. Позначимо за  $y_i^-(k+1)$  нижнє та за  $y_i^+(k+1)$  - верхнє інтервальні значення правих частин кожного з базових  $m$  рівнянь на  $k+1$  ітерації і обчислюватимемо їх за такими формулами:

$$y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Тоді, спираючись на вираз (14), значення  $\delta_i^-(k+1) \geq 0$  та  $\delta_i^+(k+1) \geq 0$  у формулах (15) необхідно максимізувати, виходячи із умови включень

$$\Omega \subseteq \{ \Omega_m(k) \cap \check{\Omega}(k+1) \} \subseteq \Omega_m(k+1), \quad (16)$$

де  $\Omega_m(k+1)$  -  $m$  - вимірний паралелотоп, отриманий на  $k+1$  - й ітерації;  $\check{\Omega}(k+1)$  - «гіперсмуга», яка визначається  $k+1$  рівнянням ( $k=1, \dots, N-m$ ) із тих, що залишились в ІСЛАР (4) після вибору  $m$  базових рівнянь.

У праці [4] отримано аналітичні співвідношення для розрахунку значень  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$  для наступної ітерації. Розглянемо коротко суть міркувань, на основі яких отримані зазначені співвідношення.

Позначимо за  $\vec{b}_s(k)$  ( $s = 1, \dots, 2^m$ ) вершину паралелографа  $\Omega_m(k)$  і перепишемо формулу (7) для обчислення координат вершин на  $k$ -тій ітерації

$$\vec{b}_s(k) = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s(k), \quad (17)$$

де  $\vec{Y}_s(k)$ , - вектор, складений із комбінацій нижніх  $y_i^-(k)$  та верхніх  $y_i^+(k)$  інтервальних значень правих частин кожного з базових  $m$  рівнянь, які обчислюємо за рекурентними формулами (15).

У праці [4] показано, якщо вершини  $\vec{b}_s(k)$  належать одній грані паралелографа, то відповідні вектори  $\vec{Y}_s(k)$  в формулі (17) мають хоча б по одній спільній компоненті  $y_i^-(k)$  чи  $y_i^+(k)$ . Це означає, що обчислення меж  $y_i^-(k)$  та  $y_i^+(k)$  в базових рівняннях на  $k$ -тому кроці за рекурентними схемами (15) та за умов максимізації  $\delta_i^-(k+1) \geq 0$  і  $\delta_i^+(k+1) \geq 0$ , графічно відображається переміщенням відповідних граней паралелографа  $\Omega_m(k)$  в сторону зменшення його розмірів, але при цьому має виконуватися умова (16).

З метою визначення відстані, на яку потрібно переміщувати грань, щоб забезпечити умову включення (16), для кожної вершини  $\vec{b}_s(k)$  уведено скалярні функції, які характеризують відстань між вершиною і відповідною межею “гіперсмуги”  $\tilde{\Omega}(k+1)$

$$L_s(k) = y_{k+1}^- - \vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k), \quad (18)$$

$$L'_s(k) = \vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}'_s(k) - y_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1}, \quad (19)$$

де  $\vec{x}_{k+1}$  - вектор вхідних змінних у  $k+1$  спостереженні, який визначає  $k+1$  рівняння в ІСЛАР (4);  $y_{k+1}^-$ ,  $y_{k+1}^+$  - нижнє та верхнє інтервальні значення вихідної змінної для  $k+1$  інтервального рівняння;  $\Delta_{k+1} = y_{k+1}^+ - y_{k+1}^-$ .

В подальшому обчислювальна схема методу ґрунтується на аналізі значень функцій  $L_s(k)$ ,  $L'_s(k)$ , в особливості їх знаків.

Такий аналіз, проведений у праці [4], дозволяє виявити розміщення вершин гіперпаралелепіеда відносно “гіперсмуги”, утвореної  $k+1$  інтервальним рівнянням. Проте проведені дослідження комп’ютерної реалізації методу показали, що неврахована можлива несумісність ІСЛАР (4). Тому розглянемо таку можливість при подальшому удосконаленні обчислювальної схеми.

Як показано на рис. 1а) для випадку  $m = 2$ , вершини  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$  грані з номером  $i = 1$  розміщені з одного боку “смуги” і відповідно  $L_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, 2$ ; одна вершина  $\vec{b}_3$  грані з номером  $i' = 1$  належить “смугі”, а інша  $\vec{b}_4$  знаходиться на її межі, тому  $L_3(k) < 0$ , а  $L_4(k) = 0$ .

На рис. 1б) показано, що вершини  $\vec{b}_2$ ,  $\vec{b}_3$  грані з номером  $i' = 2$  розміщені по обидва боки “смуги” і, відповідно,  $L_2(k) < 0$ ,  $L_3(k) > 0$ ; обидві вершини  $\vec{b}_3$ ,  $\vec{b}_4$  грані з номером  $i' = 1$  знаходяться вище “смуги” (з одного боку “смуги”), тому  $L'_s(k) > 0 \quad \forall s = 3, 4$ .

Разом з тим, наведений рисунок 1 не ілюструє випадок коли ІСЛАР (4) є несумісною, що не забезпечує отримання вимог щодо наявності розв’язку задачі локалізації. На рис.2 наведено випадки, коли зазначена система є несумісною.

Як показано на рис. 2а) для випадку  $m=2$ , усі вершини  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  паралелограма розміщені з одного боку "смуги" і відповідно  $L_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, \dots, 4$ . Проте ІСЛАР, графічний розв'язок якої представлено на рис.2 у вигляді паралелограма та «смуги», яка його не перетинає, є несумісна.

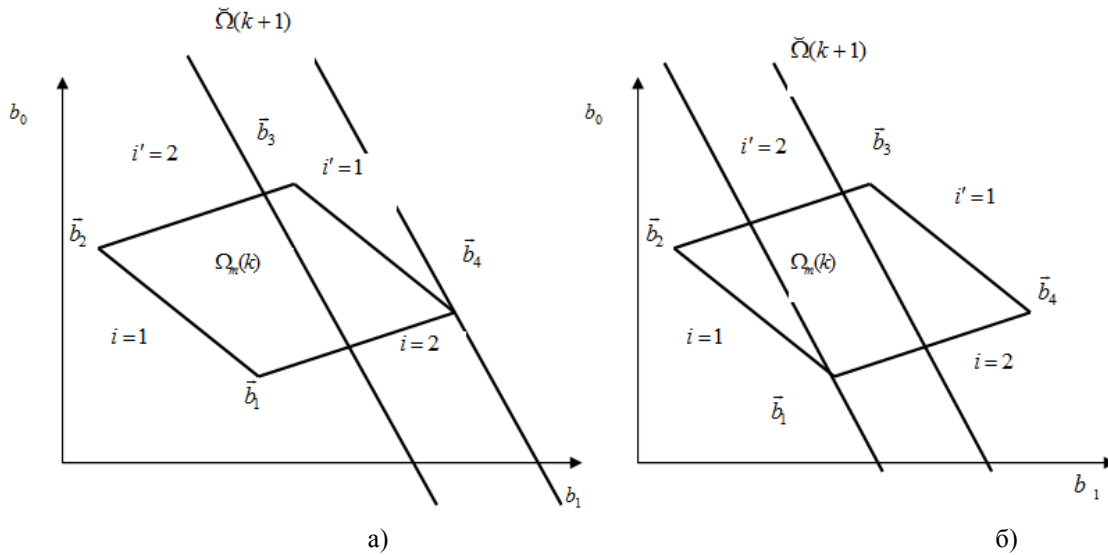


Рисунок 1 – Розміщення вершин множини локалізації  $\Omega_m(k)$  стосовно "смуги"  $\tilde{\Omega}(k+1)$

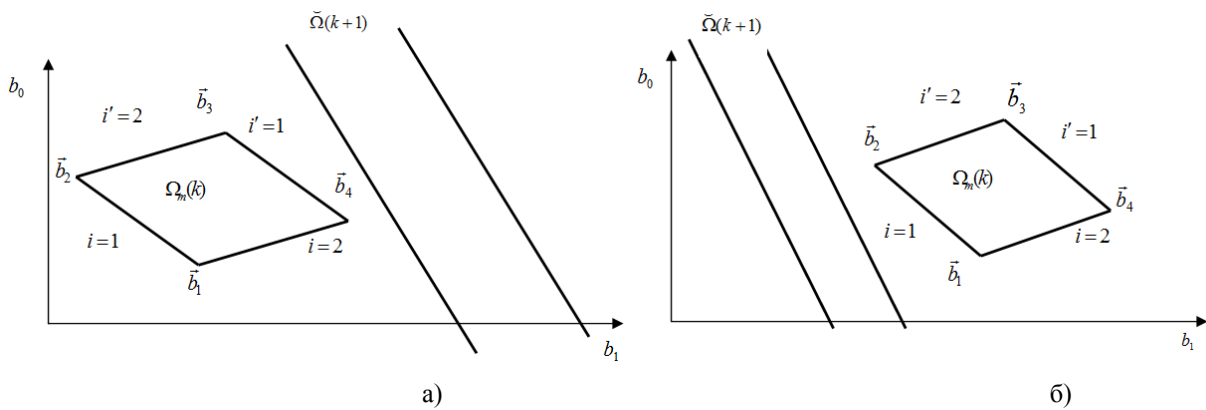


Рисунок 2 - Ілюстрація до встановлення несумісності ІСЛАР

З іншого боку на рис. 2б) усі вершини  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  паралелограма розміщені з іншого боку "смуги" і відповідно  $L'_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, \dots, 4$ . Проте ІСЛАР як і у попередньому випадку є несумісною.

Зазначені випадки не передбачено в комп'ютерних реалізаціях методу локалізації параметрів, що неодноразово призводило до непередбачуваних результатів цих реалізацій.

Проведений аналіз, дозволяє сформулювати критерій інформативності  $k+1$  рівняння: якщо для усіх вершин певної  $i$ -ї грані виконуються умови

$$L_s(k) > 0, \quad \forall s = 1, \dots, 2^{m-1} \quad (20)$$

та одночасно

$$\exists L_s(k) < 0, \quad s = 1, \dots, 2^m, \quad (21)$$

то  $k + 1$  інтервальне рівняння є інформативним і ця грань переміщується (в сторону зменшення розмірів паралелотопа) до моменту дотику її найближчої вершини до межі "гіперсмуги". Звідси на  $k$ -тій ітерації для цієї грані справедливим є такий вираз:

$$\min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k+1)\} = 0 \quad (22)$$

Зауважимо, що переміщення  $i$ -ї грані паралелотопа у випадку виконання умов (20), (21) означає переміщення нижньої межі  $y_i^-(k+1)$  інтервалу  $[y_i^-(k+1), y_i^+(k+1)]$ . Користуючись зробленим зауваженням, знайдемо рекурентну формулу для  $L_s(k+1)$ . Для цього підставимо у формулу (17) замість  $i$ -ї компоненти  $y_i^-(k+1)$  вектора  $\vec{Y}_s(k+1)$  її значення  $y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1)$  з виразу (15), отримаємо таку рекурентну формулу:

$$\vec{b}_s(k+1) = \vec{b}_s(k) + \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1), \quad (23)$$

де  $\vec{f}_i$  -  $i$ -тий стовпець матриці  $F_m^{-1}$ .

З урахуванням (18), розрахункова формула для значень  $L_s(k+1)$   $k+1$ -ї ітерації матиме такий вигляд:

$$L_s(k+1) = L_s(k) - \vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1) \quad (24)$$

Із виразу (24) бачимо, що при додатному значенні  $\delta_i^-(k+1)$ , одночасне виконання умов (20) та (22) можливе тільки у випадку  $\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i > 0$ . З врахуванням цього прирівняємо праву частину рівняння (24) до нуля відповідно до умови (20) та із урахуванням умов (21) після нескладних перетворень отримаємо співвідношення для розрахунку значення  $\delta_i^-(k+1)$

$$\delta_i^-(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k) / |\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \\ \text{якщо } (L_s(k) > 0, s = 1, \dots, 2^{m-1}) \wedge (\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \wedge (\exists L_s(k) < 0, s = 1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L_s(k) \leq 0 \\ \text{"розв'язок ІСЛАР відсутній"} \text{ якщо } (L_s(k) > 0, \forall s = 1, \dots, 2^m) \end{cases} \quad (25)$$

Дотримуючись вище викладених міркувань отримаємо вираз для розрахунку  $\delta_i^+(k+1)$

$$\delta_i^+(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L'_s(k) / |\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \\ \text{якщо } (L'_s(k) > 0, s = 1, \dots, 2^{m-1}) \wedge (\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \wedge (\exists L'_s(k) < 0, s = 1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L'_s(k) \leq 0 \\ \text{"розв'язок ІСЛАР відсутній"} \text{ якщо } (L'_s(k) > 0, \forall s = 1, \dots, 2^m) \end{cases} \quad (26)$$

Отже для реалізації однієї ітерації, запропонованого локалізаційного методу необхідно виконати таку послідовність обчислень [4]:

1. Розрахувати значення скалярних функцій  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  для усіх вершин паралелотопа.

2. Обчислити  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$ , відповідно, за формулами (25) та (26).

3. Обчислити межі інтервалу  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$  за формулою (15).

Слід зауважити, що для обчислень за формулами (25) та (26) необхідне попереднє групування усіх вершин  $s = 1, \dots, 2^m$  до відповідних граней  $i = 1, \dots, m$ . Інша особливість, яку слід враховувати при реалізації методу є порядок вибору рівнянь із ІСЛАР, які не задають конфігурацію локалізаційної області.

#### Комп'ютерна реалізація методу локалізації параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку»

Для апробації алгоритму реалізації методу використаємо дані із прикладу побудови моделі прогнозування потужності малої гідроелектростанції (МГЕС), розглянутого у праці [8]. Метою такого розгляду є ілюстрація уведеної модифікації алгоритму, щодо можливої несумісності ІСЛАР.

Для локалізації параметрів цієї моделі у праці [8] використовували підхід, що ґрунтується на знаходженні інтервальних оцінок параметрів. Тобто метод ґрунтується на знаходженні локалізаційної області у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Як відомо, такий метод дає можливість отримати тільки «грубу» оцінку області параметрів і відповідно забезпечує низьку точність інтервальних моделей. Тому для розв'язування зазначеної задачі використаємо метод локалізації параметрів із виділенням «насиченого блоку».

У праці [8] описана модель прогнозування потужності МГЕС:

$$y(\vec{x}) = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_1 x_3 + b_3 \cdot \sin(x_3) + b_4 \cdot x_1 \cdot x_2^2 \quad (27)$$

де  $y(\vec{x})$  - згенерована електроенергія,  $x_1$  - реактивна потужність,  $x_2$  - напір на МГЕС,  $x_3$  - рівень води на гідропості.

У табл. 1 представлено вихідні дані генерованої електроенергії МГЕС та фактори впливу на обсяги згенерованої електроенергії [2].

Розглянемо алгоритм обчислень. Програмний модуль для розв'язування зазначеної задачі створено в середовищі Mathcad.

Крок 1. Вибір початкових даних та формування «насиченого блоку» ІСЛАР згідно структури (27):

$$\begin{cases} 1087,2 \leq 182,5 \cdot b_1 + 1186,25 \cdot b_2 + 0,215 \cdot b_3 + 3861,7 \cdot b_4 \leq 1211,28; \\ 1105,32 \leq 182,6 \cdot b_1 + 1059,08 \cdot b_2 - 0,465 \cdot b_3 + 3863,816 \cdot b_4 \leq 1231,468; \\ 1069,08 \leq 182,7 \cdot b_1 + 1004,85 \cdot b_2 - 0,706 \cdot b_3 + 4035,843 \cdot b_4 \leq 1191,092; \\ 1069,08 \leq 182,7 \cdot b_1 + 908,019 \cdot b_2 - 0,967 \cdot b_3 + 4035,843 \cdot b_4 \leq 1191,092. \end{cases}$$

Таблиця 1 - Зведені дані про щоденну генеровану електроенергію МГЕС

№	Реактивна потужність	Напір	Рівень води на гідропості	Згенерована електроенергія (кВт/доба)
$i$	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$[y^-(x_i); y^+(x_i)]$
1	182,5	4,6	6,5	[1087,2; 1211,28]
2	182,6	4,6	5,8	[1105,32; 1231,468]
3	182,7	4,7	5,5	[1069,08; 1191,092]
4	182,7	4,7	4,97	[1069,08; 1191,092]
5	182,7	4,7	5,45	[1087,2; 1211,28]
6	182,7	4,6	6,8	[906; 1009,4]
7	182,9	4,7	7,5	[1069,08; 1191,092]
8	183	4,7	11,9	[1087,2; 1211,28]
9	183,1	4,7	14,9	[1087,2; 1211,28]
10	183,1	4,7	12,5	[1105,32; 1231,468]
11	183,1	4,7	9,8	[1123,44; 1251,656]
12	183,1	4,55	10,4	[1087,2; 1211,28]
13	183,1	4,65	15,5	[1087,2; 1211,28]



продовження табл. 1

14	183,1	4,6	13,7	[1141,56; 1271,844]
15	184,6	4,65	13,7	[1105,32; 1231,468]
16	184,6	4,7	14,9	[1159,68; 1292,032]
17	184,6	4,7	17	[1159,68; 1292,032]
18	184,6	4,7	14	[1159,68; 1292,032]
19	184,6	4,7	12,8	[1159,68; 1292,032]
20	184,7	4,7	12,5	[1141,56; 1271,844]

Оскільки структура досліджуваної моделі містить чотири невідомі параметри, то матриця «насиченого блоку» має розмірність 4x4. Дані для цієї матриці, тобто базові рівняння, обирали, спираючись на міркування щодо забезпечення максимальної кількості ітерацій обчислювального процесу з метою його ґрунтовного дослідження. Для цього використали дані перших чотирьох спостережень із табл. 1, що утворюють «насичений блок».

Крок 2. Формування матриці  $F$  та обчислення  $F^{-1}$ . Ілюстрація - рис. 3.

Крок 3. Групування векторів  $\vec{Y}_s(k)$ , ( $s = 2^m = 16$ ), використовуючи інтервальні значення  $y_i^-(k)$  та  $y_i^+(k)$  кожного із  $m$  базових інтервальних рівнянь «насиченого блоку». Ілюстрація - рис. 4.

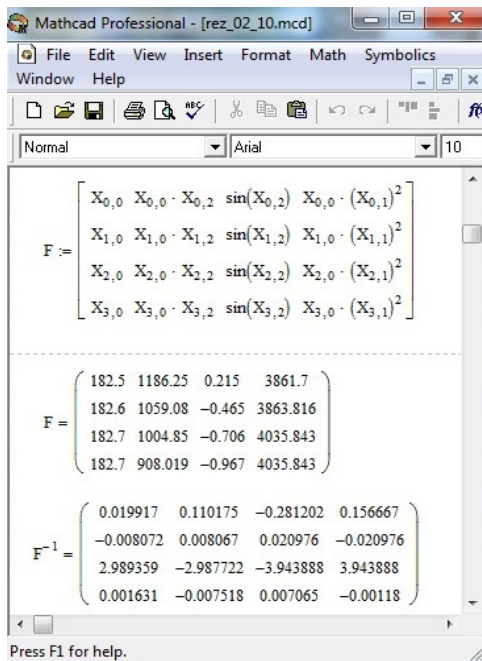


Рисунок 3 – Ілюстрація процедури формування матриці  $F$  та обчислення  $F^{-1}$

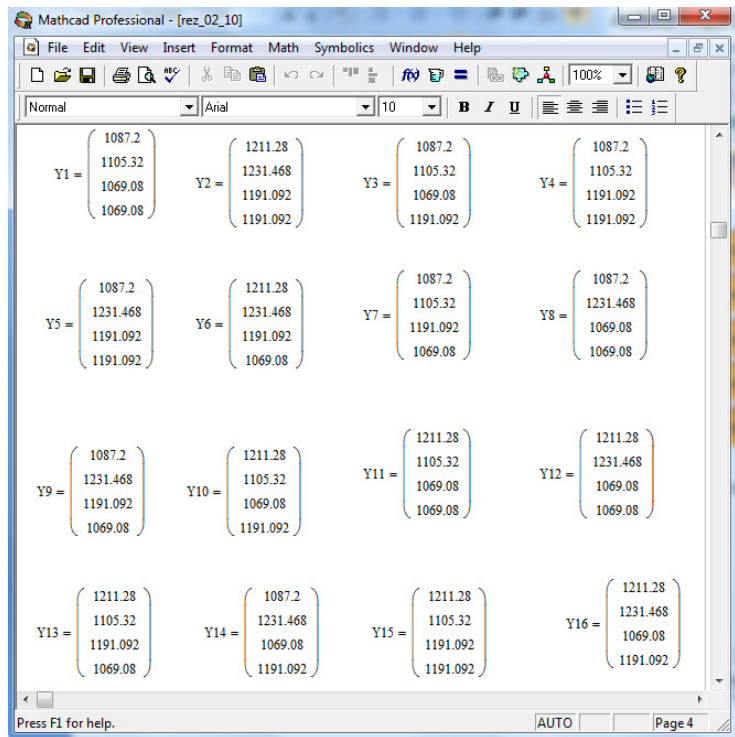


Рисунок 4 – Ілюстрація процедури формування вектора  $\vec{Y}_s(k)$ , ( $s = 2^m = 16$ )

Крок 4. Обчислення координат вершин паралелопа  $\Omega_m(k)$  на  $k=0$  ітерації за формулою (17). Ілюстрація – рис. 5.

Даний етап обчислень передбачений формулами (18), (19), однак для детальнішого опису процесу реалізації алгоритму продемонстровано процедуру знаходження вершин як окрему процедуру обчислень.

Крок 5. Уведення додаткового рівняння до «насиченого блоку» на  $k = 1$  ітерації та здійснення обчислень за формулами (18), (19). Ілюстрація – рис. 6.

Додаткове рівняння, уведене на  $k = 1$  ітерації:

$$1087,2 \leq 182,7 \cdot b_1 + 995,715 \cdot b_2 - 0,74 \cdot b_3 + 4035,843 \cdot b_4 \leq 1211,28$$

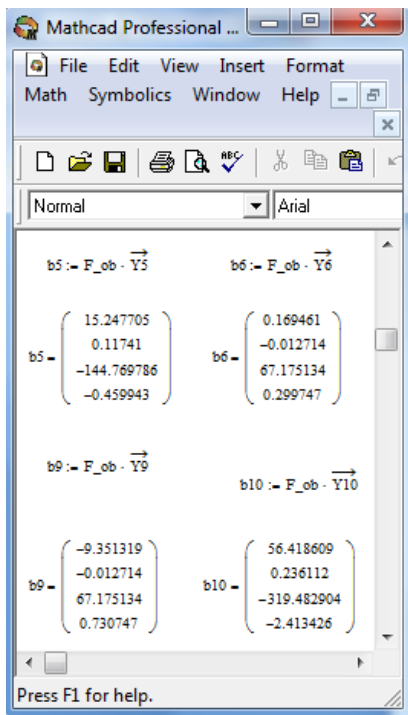


Рисунок 5 – Ілюстрація фрагменту процедури обчислення вершин паралелопа  $\Omega_m(k)$

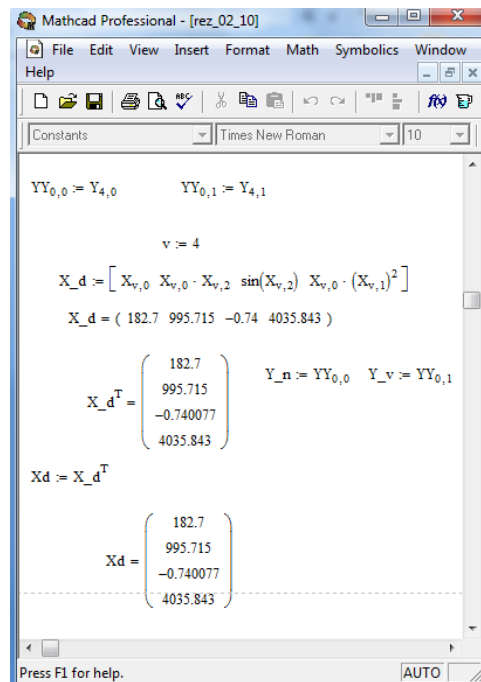


Рисунок.6 – Ілюстрація етапу введення додатково-го рівняння до «насиченого блоку»

На рис. 6  $\vec{\phi}^T(\vec{x}_{k+1})$  (формули (18), (19)) позначено як «Xd», а значення  $y_{k+1}^-$  та  $y_{k+1}^+$  «YY0,0» та «YY0,1» відповідно.

Крок 6. Обчислення відстаней  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  між вершинами паралелопа та відповідною межею «гіперсмуги»  $\tilde{\Omega}(k+1)$ . Ілюстрація - рис. 7.

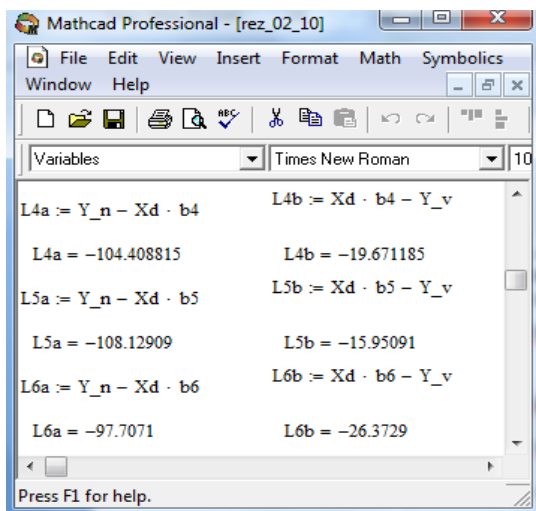


Рисунок 7 – Ілюстрація фрагменту обчислень  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$ ,  $k=1$ .

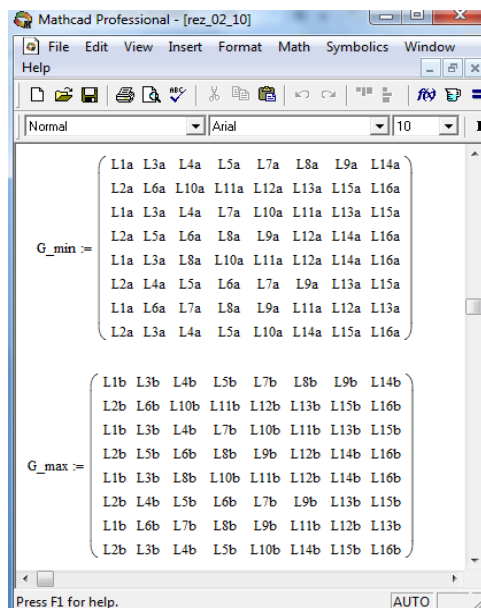


Рисунок 8 – Ілюстрація групування вершин паралелопа по гранях

Крок 7. Перевірка умов (20), (21) для усіх вершин, шляхом групування їх по гранях. Групування здійснено, спираючись на твердження, що якщо вершини  $\vec{b}_s(k)$  належать одній грані паралелетопа, то відповідні вектори  $\vec{Y}_s(k)$  в формулі (17) мають хоча б по одній спільній компоненті  $y_i^-(k)$  чи  $y_i^+(k)$ .

Для зручності візуального представлення обчислення уведено матриці  $G_{\min}$  та  $G_{\max}$ . Кожен рядок зазначених матриць відображає відстані відповідних вершин, розміщених на одній грані до межі «гіперсмуги». Причому матриця  $G_{\min}$  відображає значення відстані від вершин до нижньої межі «гіперсмуги», а матриця  $G_{\max}$  – до верхньої межі «гіперсмуги» відповідно (рис. 8).

Крок 8. Аналіз знаків  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  та перевірка «інформативності» додаткового інтервального рівняння. Ілюстрація – рис.9.

На  $k = 1$  ітерації встановили, що, враховуючи умови (20), (21), введене в систему на  $k = 1$  ітерації інтервальне рівняння є «неінформативним» і переміщення граней не здійснювали, а продовжили обчислення згідно формул (18), (19) на  $k = 2$  ітерації, тобто перейшли на крок 5.

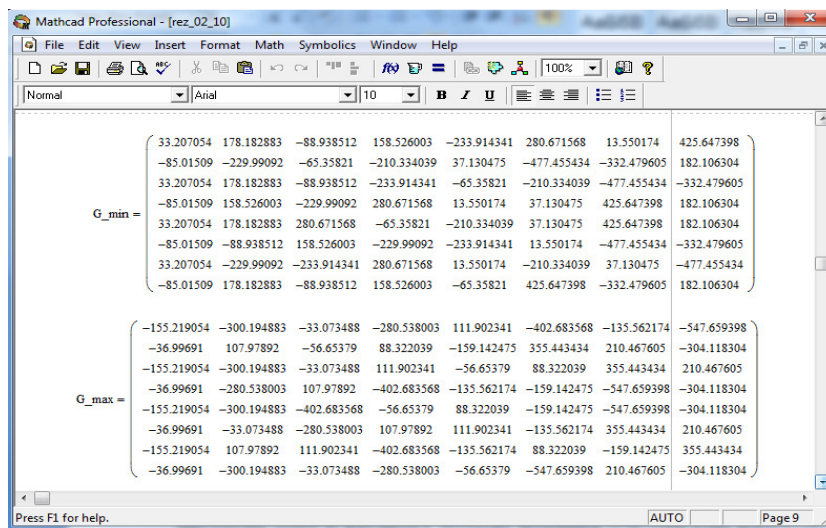


Рисунок 9 – Ілюстрація процедури перевірки «інформативності» рівняння, введеного в ІСЛАР на  $k = 1$  ітерації

Крок 5. Уведення додаткового рівняння до «насиченого блоку» на  $k = 2$  ітерації та здійснення обчислень за формулами (18), (19).

Додаткове рівняння, введене на  $k = 2$  ітерації:

$$906 \leq 182,7 \cdot b_1 + 1242,36 \cdot b_2 + 0,494 \cdot b_3 + 3865,932 \cdot b_4 \leq 1009,4$$

Згідно формул (18) та (19) обчислили відстань між вершинами та відповідними межами «гіперсмуги», утвореної додатковим рівнянням (рис. 10).

Перевіряючи виконання умов (25) та (26) на  $k=2$  ітерації, отримали повідомлення про несумісність системи, адже згідно умови (26):

$$\text{"розв'язок ІСЛАР відсутній" якщо } (L'_s(k) > 0, \forall s = 1, \dots, 2^m).$$

Іншими словами додане обмеження, задане інтервальним рівнянням, утворило «смугу», верхня межа якої не має жодної спільної точки з областю розв'язків, отриманою на попередній ітерації.

Встановлений факт означає, що на основі рівняння (27) та наведених даних з таблиці 1 неможливо побудувати інтервальну модель генерованої в МГЕС електроенергії. Хоча у праці [8] зазначена модель була побудована із використанням методу локалізації області розв'язків ІСЛАР у вигляді багатовимірного прямокутного паралелепіпеда. Можна припустити, оскільки зазначений метод локалізації багаторазово використовує симплекс-процедури (багаторазове розв'язування задачі лінійного програмування), то це призводить до накопичення похибок в процесі обчислення, що, як результат, породжує хибні розв'язки. Модифікований у даній праці метод локалізації із виділенням «насиченого блоку» має в цьому сенсі перевагу, оскільки обчислювальна процедура його реалізації не призводить до накопичення похибок заокруглень.

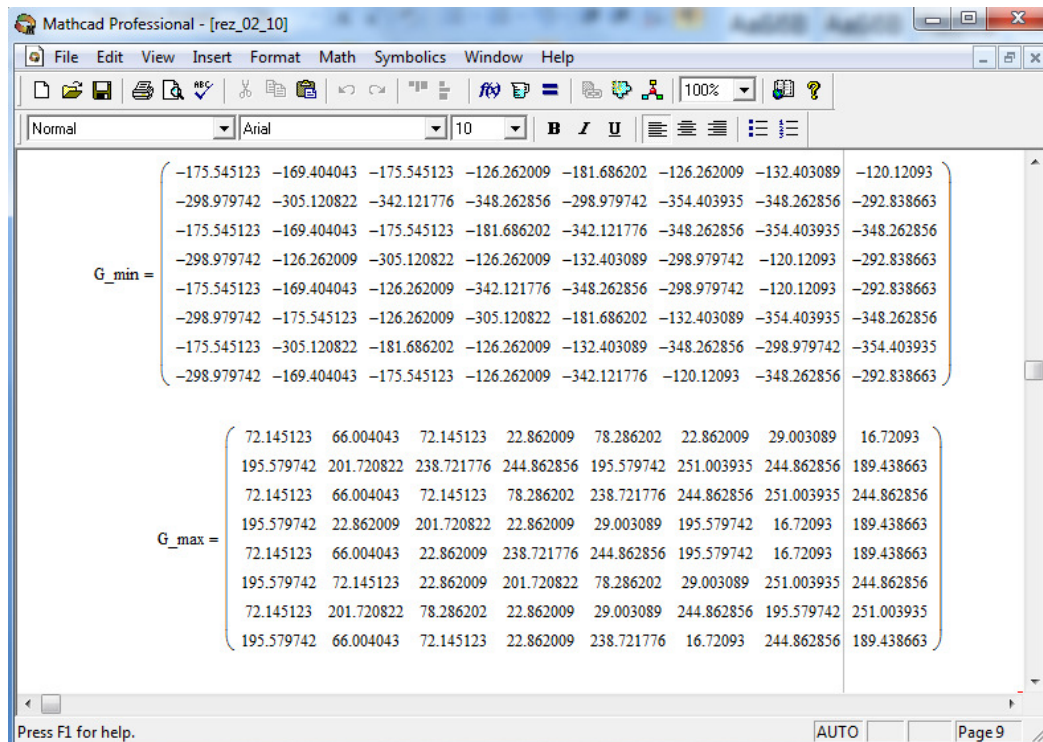


Рисунок 10 – Ілюстрація результатів обчислення відстаней між вершинами та межами «гіперсмуги» на  $k=2$  ітерації

Слід зауважити, що при реалізації алгоритму без використання зазначеної умови на основі існуючої версії алгоритму у вище зазначеному випадку отримували зациклення, причина якого не була очевидною. Уведення розглянутої в статті модифікації методу та алгоритму забезпечило усунення зациклення та забезпечило надійність та відмово стійкість розробленої програмної реалізації.

### Висновки

1. Розглянуто метод ідентифікації області параметрів інтервальних моделей із виділенням «насиченого блоку» у базовій інтервальній системі лінійних алгебричних рівнянь, яка побудована на основі даних з інтервальною невизначеністю. Встановлено, що основною математичною задачею при реалізації цього методу є задача оцінювання множини розв'язків ІСЛАР.

2. Встановлено умови застосування методу, зокрема побудовано стійкі кількісні критерії сумісності базової ІСЛАР і на цій основі модифіковано базові формули реалізації методу та базовий алгоритм.

3. Із застосуванням комп'ютерної реалізації методу на прикладі побудови математичної моделі для прогнозування генерованої електроенергії на МГЕС показано позитивний ефект від проведених досліджень та удосконалень методу. Зокрема, для удосконаленого алгоритму забезпечено прогнозованість результату та відсутність зациклювань у рекурентній схемі.

### Список використаних джерел

1. Вошинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вошинин, Г. Р. Сотиров. – М. : МЭИ – София: Техника, 1989. – 224 с.
2. Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис. доктора физ. –математ. наук / С. П. Шарый. – Новосибирск : Ин-т вычисл. Технологий СО РАН, 2000. – 322 с.
3. Дивак М. П. Ідентифікація моделей об'єктів в умовах інтервальної невизначеності на основі методів аналізу інтервальних даних / М. П. Дивак, П. Г. Стахів // Пр. міжн. конф. з управління «АВТОМАТИКА-2000», Львів 11–15 вересня 2000: в 7–ми томах. – Львів : Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000. – Т. 2. – С. 90–97.
4. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними: монографія / за ред. М. П. Дивака. – Тернопіль : Економічна думка, 2011. – 216 с.
5. Бочков А. Ф. Интервальный анализ как альтернатива регрессионному анализу / А. Ф. Бочков, А. П. Вошинин, Г. Р. Сотиров // Заводская лаборатория. – 1990. – №7. – С. 76 – 81.

6. Воцинин А. П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей / А. П. Воцинин, М. П. Дывак // Заводская лаборатория. – 1993. – №1. – С. 56–59.
7. Дывак М. П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації // Вимірвальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. – №4. – С.12–17.
8. Дывак М.П. Інтервальна модель для прогнозування потужності малої гідро-електростанції «Топольки» / М.П. Дывак, В. І. Манжула, Ю. П. Франко // Енергетика та електрифікація.- 2008.- №11 (303). - С. 21-29.

Стаття надійшла: 19.06.2014.

#### **Відомості про авторів**

**Дывак Микола Петрович** – д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук, декан факультету комп'ютерних інформаційних технологій ТНЕУ.

**Пукас Андрій Васильович** – к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних наук факультету комп'ютерних інформаційних технологій ТНЕУ.

**Олійник Ірина Степанівна** – аспірант кафедри комп'ютерних наук факультету комп'ютерних інформаційних технологій ТНЕУ.