УДК 681.5.015:007

Г.Б. РАКИТЯНСЬКА

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

ОПТИМІЗАЦІЯ СПОЛУЧЕНИХ НЕЧІТКИХ БАЗ ЗНАНЬ НА ПРАВИЛАХ І ВІДНОШЕННЯХ

Анотація. Розглядається задача оптимізації сполучених нечітких баз знань, в яких причини і наслідки з'єднуються нечіткими відношеннями, а міри значимостей причин і наслідків – класифікаційними нечіткими правилами, які є якісними розв'язками системи рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу. Задача оптимізації сполученої нечіткої бази знань, яка зведена до задачі *min-max* кластеризації, полягає у виборі таких класів виходу, для яких інтервальні розв'язки системи рівнянь нечітких відношень забезпечують необхідні або екстремальні рівні точності виведення і кількості правил. Такий підхід дозволяє понизити складність задачі оптимізації нечіткої бази знань шляхом поетапного генерування і селекції нечітких відношень і правил.
Ключові слова: оптимізація нечітких баз знань, *min-max* кластеризація, нечіткі відношення, розв'язання системи рівнянь нечітких відношень, класифікаційні нечіткі правила, сполучені нечіткі правила.
Аннотация. Рассматривается задача оптимизации составных нечетких баз знаний, в которых причины и следствия объединяются нечеткими отношениями, а меры значимостей причин и следствий – классификационными нечеткими правилами, которые являются качественными решениями системы уравнений нечетких отношений для заданных классов выхода. Задача оптимизации составной нечеткой базы знаний, которая сведена к задаче *min-max* кластеризации, заключается в выборе таких классов выхода, для которых интервальные решения системы уравнений нечетких отношений обеспечивают необходимые или экстремальные уровни точности вывода и количества правил. Такой подход позволяет понизить сложность задачи оптимизации нечеткой базы знаний путем поэтапного генерирования и селекции нечетких отношений и правил.
Ключевые слова: оптимизация нечетких баз знаний, *min-max* кластеризация, нечеткие отношения, решение системы уравнений нечетких отношений, классификационные нечеткие правила, составные нечеткие правила.
Abstract. The problem of composite fuzzy knowledge base optimization is considered. In this case, causes and effects are connected by fuzzy relations, and causes and effects significance measures are connected by classifying fuzzy rules, which can be considered as qualitative solutions of fuzzy relational equations for the given output classes. The problem of composite fuzzy knowledge base optimization amounts to the problem of *min-max* clustering and consists of selection of such output classes, for which interval solutions of fuzzy relational equations provide for necessary or extremal levels of the inference accuracy and the number of rules. Such an approach allows complexity reduction for the problem of fuzzy knowledge base optimization by consecutive generation and selection of fuzzy relations and rules.
Key words: optimal design of fuzzy knowledge bases, *min-max* clustering, fuzzy relations, solving fuzzy relational equations, classifying fuzzy rules, composite fuzzy rules.

Вступ

Проектування систем на основі нечітких правил ЯКЩО-ТО передбачає забезпечення конфліктуючих вимог: підвищення точності виведення і пониження складності системи [1]. Задача оптимізації нечіткої бази знань може розглядатись як задача кластеризації, тобто розбиття простору вхідних змінних на таке число класів, яке забезпечує необхідні або екстремальні рівні точності виведення і кількості правил. Проте для вибору числа класів використовуються евристичні критерії на основі мір зв'язаності класів [2]. Серед великої кількості методів нечіткої кластеризації виділяється *min-max* кластеризація, яка полягає у генеруванні легко зрозумілих правил-гіпербоксів [3]. Балансування між точністю виведення і кількістю правил здійснюється шляхом об'єднання/розбиття гіпербоксів. Гіпербокси навчаються за допомогою машин опорних векторів (SVM) [4] шляхом розширення/стиснення. Небажаним ефектом розширення гіпербоксів є їх перекриття, коли один образ повністю належить до двох або більше класів. Зменшення зон перекриття потребує збільшення кількості класів і, відповідно, кількості правил у базі знань.

Актуальність

В монографії [5] запропонований метод проектування класифікаційних нечітких баз знань. Така нечітка база знань містить набір правил для кожного терму вихідної змінної або класу виходу. В [5] кількість і границі класів виходу вважались заданими, а у випадку невідповідності проектним критеріям підбирались евристично. В цій статті пропонується підхід до оптимізації сполучених нечітких баз знань, в яких причини і наслідки з'єднуються нечіткими відношеннями [6], а міри значимостей причин і наслідків – класифікаційними нечіткими правилами, які є якісними розв'язками системи рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу [7]. В таких правилах використовуються сполучені нечіткі терми, для яких міри значимостей причин описуються нечіткими квантифікаторами [8], а форма функцій належності визначається інтервалами значень вхідних змінних у розв'язках системи рівнянь нечітких відношень.

Такий підхід дозволяє понизити складність задачі оптимізації нечіткої бази знань за рахунок поетапного генерування і селекції нечітких відношень і правил. На першому етапі будується генератор правил на нечітких відношеннях. На другому етапі генеруються правила ЯКЩО-ТО шляхом розв'язання системи рівнянь нечітких відношень для заданих класів виходу. Співвідношення між похибкою виведення та кількістю правил залежить від кількості та границь класів виходу, які підбираються на третьому етапі шляхом розв'язання задачі оптимізації. Дана робота є розвитком роботи [9], де вибір класів виходу здійснюється в режимі *off-line*. В даній роботі задача оптимізації нечіткої бази знань вирішується шляхом адаптивного додавання/видалення класів.

Мета

Метою роботи є розробка моделей і алгоритмів оптимізаційного проектування сполучених нечітких баз знань за критеріями «точність виведення – складність». Задача оптимізації сполученої нечіткої бази знань, яка зведена до задачі *min-max* кластеризації, полягає у виборі таких класів виходу, для яких інтервальні розв'язки системи рівнянь нечітких відношень забезпечують необхідні або екстремальні рівні точності виведення і кількості правил.

Апроксимація нечіткими правилами і відношеннями

Розглядається об'єкт виду $y = f(\mathbf{X})$ з *n* входами $\mathbf{X} = (x_1,...,x_n)$ і одним виходом y, для якого взаємозв'язок «входи - вихід» може бути представлений у вигляді системи класифікаційних нечітких правил ЯКЩО-ТО:

$$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} [\bigcap_{i=\overline{1,n}} (x_i = T_i^{jp})] \to y = d_j\,,\; j = \overline{1,m}\,, \tag{1}$$

де T_i^{jp} – терм, який оцінює змінну x_i в рядку з номером jp, $j = \overline{1,m}$, $p = \overline{1,z_j}$; d_j – терм, який оцінює змінну y; z_j – кількість правил у класі d_j; m – кількість термів вихідної змінної.

Нечітка база знань (1) може бути перетворена до множини лінгвістичних розв'язків системи рівнянь нечітких відношень шляхом переходу до сполученої системи нечітких термів.

Нехай: $\{C_1,...,C_N\} = \{c_{i1},...,c_{ik_i}\}$ – множина нечітких термів причин для оцінки параметрів x_i, $N = k_1 + ... + k_n$, $i = \overline{1,n}$; $\{D_1,...,D_M\}$ – множина нечітких термів наслідків для оцінки параметра y.

Взаємозв'язок «причини – наслідки» будемо задавати системою матриць нечітких відношень $\mathbf{R}_i \subseteq c_{il} \times D_J = [r_{il}^J$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$, $J = \overline{1,M}$], яка еквівалентна матриці нечітких відношень $\mathbf{R} \subseteq C_I \times D_J = [r_{IJ}$, $I = \overline{1,N}$, $J = \overline{1,M}$]. При наявності матриць $\mathbf{R}_i$, $i = \overline{1,n}$, залежність «входи – вихід» описується за допомогою розширеного композиційного правила виведення [1]:

$$\boldsymbol{\mu}^D(y) = \boldsymbol{\mu}^{A_1}(x_1) \circ \mathbf{R}_1 \bigcap ... \bigcap \boldsymbol{\mu}^{A_n}(x_n) \circ \mathbf{R}_n\;, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\mu}^{A_i}(x_i) = (\mu^{c_{i1}},...,\mu^{c_{ik_i}})$ – вектор мір значимостей причин c_{il}, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$; $\boldsymbol{\mu}^D(y) = (\mu^{D_1},...,\mu^{D_M})$ – вектор мір значимостей наслідків D_J, $J = \overline{1,M}$.

Із співвідношення (2) випливає система рівнянь нечітких відношень, яка зв'язує функції належності нечітких термів причин і наслідків:

$$\mu^{D_J}(y) = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \max_{l=\overline{1,k_i}} \left[\min(\mu^{c_{il}}(x_i), r_{il}^J) \right] \right\},\; J = \overline{1,M}\,. \tag{3}$$

Для кожного класу d_j множина розв'язків системи рівнянь (3) може бути представлена у вигляді системи сполучених правил ЯКЩО-ТО:

$$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} \left[\bigcap_{i=\overline{1,n}} \left\{ \bigcup_{l=\overline{1,k_i}} (\mu^{c_{il}}(x_i) = \alpha_{il}^{jp}) \right\} \right] \to y = d_j\,,\; j = \overline{1,m}\;, \tag{4}$$

де α_{il}^{jp} – нечіткий квантифікатор, який описує міру значимості $\mu^{c_{il}}$ в правилі з номером $p = \overline{1,z_j}$.

Шляхом переходу від термів α_{il}^{jp}, що описують міри значимостей $\mu^{c_{il}}$, до термів a_{il}^{jp}, що описують змінні x_i, система правил (4) переписується у вигляді:

$$\bigcup_{p=\overline{1,z_j}} \left[\bigcap_{i=\overline{1,n}} \left\{ \bigcup_{l=\overline{1,k_i}} (x_i = a_{il}^{jp}) \right\} \right] \to y = d_j\,,\; j = \overline{1,m}\;, \tag{5}$$

де $a_{il}^{jp} = (c_{il}, \alpha_{il}^{jp})$ – сполучений терм, що описує змінну x_i, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,k_i}$, в правилі з номером jp.

Нечіткій базі знань (5) відповідають нечіткі логічні рівняння, які зв’язують функції належності сполучених термів у розв’язках системи (3):

$$\mu^{d_j}(y) = \max_{p=\overline{1,z_j}} \left[w_{jp} \cdot \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \max_{l=\overline{1,k_i}} (v_{il}^{jp} \cdot \mu^{a_{il}^{jp}}(x_i)) \right\} \right], \ j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

де $\mu^{d_j}(y)$ – функція належності змінної y до класу d_j; $\mu^{a_{il}^{jp}}(x_i)$ – функція належності змінної x_i до сполученого терму a_{il}^{jp}=(c_{il}, α_{il}^{jp}); w_{jp} – вага правила з номером jp; v_{il}^{jp} – вага терму у розв’язку з номером jp.

У нечітких логічних рівняннях використовується така функція належності нечіткого терму *T*:

$$\mu^T(x) = 1\big/\left(1 + \left((x-\beta)/\sigma\right)^2\right), \tag{7}$$

де β – координата максимуму функції, $\mu^T(\beta)=1$; σ – параметр концентрації [5].

Для нечітких відношень і правил операція дефазифікації виконується за формулами:

$$y = \sum_{J=1}^{M} y_R^J \cdot \mu^{D_J}(y) \Bigg/ \sum_{J=1}^{M} \mu^{D_J}(y), \tag{8}$$

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_r^j \cdot \mu^{d_j}(y) \Bigg/ \sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y), \tag{9}$$

де y_R^J і y_r^j – границі класів рішень D_J і d_j, відповідно [5].

Якщо правила (5) є розв’язками системи рівнянь нечітких відношень (3), то для якісних значень входів $x_i = a_{il}^{jp}$ і виходу $y = d_j$ у розв’язку з номером jp виконується співвідношення:

$$\mu^{D_J}(d_j) = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \max_{l=\overline{1,k_i}} \left[\min(\mu^{c_{il}}(a_{il}^{jp}), r_{il}^J) \right] \right\}, \ j=\overline{1,m},$$

де $\mu^{D_J}(d_j)$ і $\mu^{c_{il}}(a_{il}^{jp})$ – степені належності значень $x_i = a_{il}^{jp}$ і $y = d_j$ до нечітких термів D_J і c_{il}.

Тоді виникає задача оберненого виведення, яка ставиться таким чином: для класів виходу $y = d_j$ знайти кількість правил z_j і відновити форми функцій належності входів $x_i = a_{il}^{jp}$ у кожному правилі.

Генерування лінгвістичних розв’язків рівнянь нечітких відношень

Елементами розв’язків (4) рівнянь нечітких відношень (3) є значення вхідних змінних x_i, $i=\overline{1,n}$, для яких $\mu^{c_{il}}(x_i)$=α_{il}^{jp}, $p=\overline{1,z_j}$. Ці значення інтерпретуються як координати максимуму функцій належності нечітких термів a_{il}^{jp}, що описують змінну x_i в правилі jp, $p=\overline{1,z_j}$, бази знань (5), де значенню виходу $y = d_j$, $j=\overline{1,m}$, відповідає z_j лінгвістичних розв’язків системи (3).

Нехай $\mathbf{B}_j = (\beta_1^j,...,\beta_N^j) = (\beta_{11}^j,...,\beta_{1k_1}^j,...,\beta_{n1}^j,...,\beta_{nk_n}^j)$ – вектор координат максимуму функцій належності нечітких термів у правилі в класі $y = d_j$, $j=\overline{1,m}$. Слідуючи [6], задача розв’язання рівнянь нечітких відношень (3) формулюється так. Для кожного класу виходу $y = d_j$, $j=\overline{1,m}$, знайти вектор координат максимуму $\mathbf{B}_j = (\beta_1^j,...,\beta_N^j)$, $\beta_{il}^j \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i=\overline{1,n}$, який забезпечує мінімальну відстань між лівою і правою частиною кожного рівняння системи (3):

$$F_j = \sum_{J=1}^{M}\left[\mu^{D_J}(d_j) - \min_{i=1,n}\left[\max_{l=1,k_i}\left(\min(\mu^{c_{il}}(\beta_{il}^{j}), r_{il}^{J})\right)\right]\right]^2 = \min_{\mathbf{\mu}^C(\mathbf{B}_j)} . \quad (10)$$

Для кожного класу d_j система рівнянь (3) має множину розв'язків $S_j(\mathbf{R},\mathbf{\mu}^D(d_j))$, яка визначається множиною максимальних розв'язків $\overline{S}_j^* = \{\overline{\mathbf{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh}),\ h=\overline{1,\overline{z}_j}\}$ і множиною мінімальних розв'язків $\underline{S}_j^* = \{\underline{\mathbf{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}),\ s=\overline{1,\underline{z}_j}\}$, де кожному максимальному розв'язку $\overline{\mathbf{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh}) \in \overline{S}_j^*$ відповідає множина мінімальних розв'язків $\underline{S}_j^*$:

$$S_j(\mathbf{R},\mathbf{\mu}^D(d_j)) = \bigcup_{\overline{\mathbf{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\in\overline{S}_j^*}\ \bigcup_{\underline{\mathbf{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js})\in\underline{S}_j^*}\left[\underline{\mathbf{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}), \overline{\mathbf{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh})\right],\ j=\overline{1,m} . \quad (11)$$

Тут $\overline{\mathbf{B}}_{jh} = (\overline{\beta}_1^{jh},...,\overline{\beta}_N^{jh})$ і $\underline{\mathbf{B}}_{js} = (\underline{\beta}_1^{js},...,\underline{\beta}_N^{js})$ – вектори верхніх і нижніх границь координат максимуму β_I^{jp}, де операція об'єднання виконується над усіма $\overline{\mathbf{\mu}}^C(\overline{\mathbf{B}}_{jh}) \in \overline{S}_j^*$ і $\underline{\mathbf{\mu}}^C(\underline{\mathbf{B}}_{js}) \in \underline{S}_j^*$.

Дотримуючись [6], формування інтервалів (11) починається з пошуку нульових розв'язків задачі оптимізації (10) $\mathbf{B}_{j0} = (\beta_1^{j0},...,\beta_N^{j0})$, $j=\overline{1,m}$. Верхня границя ($\overline{\beta}_{il}^{jh}$) для $h=1$ знаходиться в діапазоні $[\beta_{il}^{j0}, \overline{x}_i]$, а для $h>1$ – в діапазоні $[max(\underline{\beta}_{il}^{jp}), \overline{x}_i]$, $p<s$. Нижня границя ($\underline{\beta}_{il}^{js}$) для $s=1$ знаходиться в діапазоні $[\underline{x}_i, \beta_{il}^{j0}]$, а для $s>1$ – в діапазоні $[\underline{x}_i, min(\overline{\beta}_{il}^{jp})]$, $p<h$.

Нехай $\mathbf{B}_j(t) = (\beta_1^j(t),...,\beta_N^j(t))$ – розв'язок задачі оптимізації (10) на *t*-ому кроці формування інтервалів. При пошуку верхніх границь передбачається, що $\beta_I^j(t) \ge \beta_I^j(t-1)$, а при пошуку нижніх границь передбачається, що $\beta_I^j(t) \le \beta_I^j(t-1)$. Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо $\mathbf{B}_j(t) \ne \mathbf{B}_j(t-1)$, то $\overline{\beta}_I^{jh}$ ($\underline{\beta}_I^{js}$)$=\beta_I^j(t)$. Якщо $\mathbf{B}_j(t) = \mathbf{B}_j(t-1)$, то формування розв'язку $[\underline{\mathbf{B}}_{js}, \overline{\mathbf{B}}_{jh}]$ припиняється. Пошук інтервалів (11) продовжується, допоки виконується умова $\overline{\mathbf{B}}_{jh} \ne \overline{\mathbf{B}}_{jp}$, $p<h$, для верхніх границь і $\underline{\mathbf{B}}_{js} \ne \underline{\mathbf{B}}_{jp}$, $p<s$, для нижніх границь.

Задача оптимізації сполученої нечіткої бази знань

Співвідношення (3) – (9) визначають загальний вид нечіткої моделі об'єкта в системі правил і відношень таким чином:

$$y = f_R(\mathbf{X}, M, \mathbf{\Psi}_R),$$
$$y = f_r(\mathbf{X}, f_R, m, Z, q, \mathbf{\Psi}_r), \quad (12)$$

де $\mathbf{\Psi}_R = (\mathbf{R}, \mathbf{B}_C, \mathbf{\Omega}_C, \mathbf{B}_D, \mathbf{\Omega}_D)$ – вектор параметрів нечітких відношень, який включає: $\mathbf{B}_C = (\beta^{C_1},...,\beta^{C_N})$ і $\mathbf{\Omega}_C = (\sigma^{C_1},...,\sigma^{C_N})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів C_I, $I=\overline{1,N}$; $\mathbf{B}_D = (\beta^{D_1},...,\beta^{D_M})$ і $\mathbf{\Omega}_D = (\sigma^{D_1},...,\sigma^{D_M})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів D_J, $J=\overline{1,M}$;

$\mathbf{\Psi}_r = (\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{B}_a, \mathbf{\Omega}_a, \mathbf{B}_d, \mathbf{\Omega}_d)$ – вектор параметрів нечітких правил, який включає: $\mathbf{W} = (w_1,...,w_Z)$ – вектор ваг правил в (5); $\mathbf{V} = (v_1,...,v_q)$ – вектор ваг термів в (5); Z – число правил в базі знань (5); q – число вхідних термів в базі знань (5); $\mathbf{B}_a = (\beta^{a_1},...,\beta^{a_q})$ і $\mathbf{\Omega}_a = (\sigma^{a_1},...,\sigma^{a_q})$ –

вектори параметрів функцій належності нечітких термів a_k, $k=\overline{1,q}$; $\mathbf{B}_d=(\beta^{d_1},...,\beta^{d_m})$ і $\mathbf{\Omega}_d=(\sigma^{d_1},...,\sigma^{d_m})$ – вектори параметрів функцій належності нечітких термів d_j, $j=\overline{1,m}$;

f_R і f_r – оператори зв’язку «входи – вихід», що відповідають формулам (3), (7), (8), і формулам (6), (7), (9), відповідно.

Введемо обмеження на об’єм сполученої нечіткої бази знань (5) в такий спосіб: $M \le \overline{M}$, $m \le \overline{m}$, де $\overline{M}$, $\overline{m}$ – максимально можлива кількість класів виходу для відношень і правил, відповідно.

Нехай: $\mathbf{Y}_R=(u_1,...,u_{\overline{M}})$ і $\mathbf{Y}_r=(v_1,...,v_{\overline{m}})$ – вектори розстановки класів виходу для відношень і правил, де u_J =1(0) або v_j =1(0) відповідають додаванню (видаленню) класу D_J або d_j, відповідно.

Будемо оцінювати складність нечіткої моделі (12) на основі кількості $Z(\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r)$ лінгвістичних розв’язків (5) системи рівнянь нечітких відношень (3).

Передбачається, що навчальна вибірка задана у вигляді L пар «входи – вихід» $\langle \hat{\mathbf{X}}_p, \hat{y}_p \rangle$, $p=\overline{1,L}$, де $\hat{\mathbf{X}}_p=(\hat{x}_1^p,...,\hat{x}_n^p)$ і $\hat{y}_p$ – вектор значень вхідних і значення вихідної змінної в експерименті з номером p. Будемо оцінювати якість нечіткої моделі (12) на основі середньоквадратичної похибки:

$$E=\sqrt{\frac{1}{L}\sum_{p=1}^{L}[f_r(\hat{\mathbf{X}}_p,M,m,\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r,\mathbf{\Psi}_R,\mathbf{\Psi}_r)-\hat{y}_p]^2}\,. \tag{13}$$

Задача оптимізації сполученої нечіткої бази знань може бути сформульована наступним чином.

Пряма постановка. Знайти вектори розстановки класів виходу для відношень $\mathbf{Y}_R$ і правил $\mathbf{Y}_r$, для яких $Z(\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r)\to min$ і $E(\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r)\le \overline{E}$, де $\overline{E}$ – допустима похибка виведення.

Двоїста постановка. Знайти вектори розстановки класів виходу для відношень $\mathbf{Y}_R$ і правил $\mathbf{Y}_r$, для яких $E(\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r)\to min$ і $Z(\mathbf{Y}_R,\mathbf{Y}_r)\le \overline{Z}$, де $\overline{Z}$ – допустима кількість правил.

Для розстановки класів виходу використовується градієнтний метод, запропонований в [10] для розв’язання задач дискретної оптимізації показників надійності. Цей метод передбачає покоординатний підйом по поверхні цільової функції в напрямку градієнту. Для визначених класів виходу розв’язується задача структурно-параметричної настройки нечітких відношень і правил за допомогою генетико-нейронних алгоритмів [5, 6].

Алгоритм оптимізації

Градієнти $\gamma_R^J(u_J)$, $J=\overline{1,M}$, і $\gamma_r^j(v_j)$, $j=\overline{1,m}$, визначимо як відношення приростів безпомилковості $\Delta E(\mathbf{\Psi},u_J=1)$ або $\Delta E(\mathbf{\Psi},v_j=1)$ до приросту кількості правил $\Delta Z(\mathbf{\Psi},u_J=1)$ або $\Delta Z(\mathbf{\Psi},v_j=1)$ внаслідок додавання класу D_J або d_j:

$$\gamma_R^J(u_J)=\Delta E(\mathbf{\Psi},u_J)/\Delta Z(\mathbf{\Psi},u_J)=(E(\mathbf{\Psi},u_J=1)-E(\mathbf{\Psi},u_J=0))/(Z(\mathbf{\Psi},u_J=1)-Z(\mathbf{\Psi},u_J=0)),$$
$$\gamma_r^j(v_j)=\Delta E(\mathbf{\Psi},v_j)/\Delta Z(\mathbf{\Psi},v_j)=(E(\mathbf{\Psi},v_j=1)-E(\mathbf{\Psi},v_j=0))/(Z(\mathbf{\Psi},v_j=1)-Z(\mathbf{\Psi},v_j=0)).$$

Алгоритми розв’язання задач оптимізації мають єдину структуру, що складається із двох ітеративних дільниць [10]. На першій з них визначається перший допустимий розв’язок шляхом послідовного додавання класів з найбільшими градієнтами, а на другій – поліпшення знайденого розв’язку шляхом пониження складності моделі.

Алгоритм розв’язання задачі в прямій постановці

Позначимо вектор розв’язку на *k*-му кроці як $\mathbf{\Psi}^{(k)}=(M^{(k)},m^{(k)},\mathbf{Y}_R^{(k)},\mathbf{Y}_r^{(k)},\mathbf{\Psi}_R^{(k)},\mathbf{\Psi}_r^{(k)})$.

1. Задати нульовий варіант нечіткої моделі, $k:=0$: $\mathbf{\Psi}^{(0)}=(M^{(0)},m^{(0)},\mathbf{Y}_R^{(0)},\mathbf{Y}_r^{(0)},\mathbf{\Psi}_R^{(0)},\mathbf{\Psi}_r^{(0)})$.

2. Якщо $E(\mathbf{\Psi}^{(k)}) > \overline{E}$, то перейти до кроку 3, інакше – до кроку 4.

3. Для моделей, таких, що $u_J^{(k)} = 0$ і $v_j^{(k)} = 0$, додати клас виходу наступним чином:

$$\mathbf{\Psi}'_J = (M^{(k)} + 1, m^{(k)}, u_J^{(k)} + 1, \mathbf{Y}_r^{(k)}, \mathbf{\Psi}_R^J, \mathbf{\Psi}_r^J),\ \mathbf{\Psi}''_j = (M^{(k)}, m^{(k)} + 1, \mathbf{Y}_R^{(k)}, v_j^{(k)} + 1, \mathbf{\Psi}_R^j, \mathbf{\Psi}_r^j).$$

Визначити градієнти $\gamma_R^J(u_J)$ і $\gamma_r^j(v_j)$ відносно розв’язку $\mathbf{\Psi}^{(k)}$. Знайти класи виходу для відношень і правил D_L і d_l, для яких $\tilde{\gamma}_R^L(u_L^{(k)}) = \max\limits_J\{\gamma_R^J\}$, $\tilde{\gamma}_r^l(v_l^{(k)}) = \max\limits_j\{\gamma_r^j\}$. Знайти координату M або m, для якої $\tilde{\gamma}(M^{(k)}, m^{(k)}) = \max\{\tilde{\gamma}_R^L, \tilde{\gamma}_r^l\}$. $k := k+1$. Для вектора $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ встановити:

$$M^{(k)} := M^{(k-1)} + 1,\ u_L^{(k)} = 1,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}'_L \text{ якщо } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_R^L;$$

$$m^{(k)} := m^{(k-1)} + 1,\ v_l^{(k)} = 1,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}''_l, \text{ якщо } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_r^l.$$

Перейти до кроку 2.

4. Поліпшити модель $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ шляхом досягнення необхідного рівня точності виведення із меншою кількістю правил. Для моделей, у яких $u_J^{(k)} = 1$ і $v_j^{(k)} = 1$, понизити складність шляхом зменшення кількості класів виходу наступним чином:

$$\mathbf{\Psi}'_J = (M^{(k)} - 1, m^{(k)}, u_J^{(k)} - 1, \mathbf{Y}_r^{(k)}, \mathbf{\Psi}_R^J, \mathbf{\Psi}_r^J),\ \mathbf{\Psi}''_j = (M^{(k)}, m^{(k)} - 1, \mathbf{Y}_R^{(k)}, v_j^{(k)} - 1, \mathbf{\Psi}_R^j, \mathbf{\Psi}_r^j).$$

Для відношень і правил знайти такі множини класів виходу $Q_R^{(k)}$ і $Q_r^{(k)}$, для яких виконуються умови:

$$E(\mathbf{\Psi}'_J) \le \overline{E}; \tag{14}$$

$$E(\mathbf{\Psi}''_j) \le \overline{E}. \tag{15}$$

Якщо $Q_R^{(k)}$ і $Q_r^{(k)}$ – порожні множини, то вектор $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ є розв’язком задачі, інакше перейти до кроку 5.

5. Для класів $D_J \in Q_R^{(k)}$ і $d_j \in Q_r^{(k)}$, які задовольняють умови (14) і (15), знайти величину, на яку зменшиться кількість правил $\Delta Z(\mathbf{\Psi}^{(k)})$. Знайти класи D_L і d_l, для яких

$$\tilde{\Delta}_R^L(u_L^{(k)}) = \max_J\{\Delta Z(\mathbf{\Psi}^{(k)}, M^{(k)} - 1, u_J^{(k)} - 1)\},\ \tilde{\Delta}_r^l(v_l^{(k)}) = \max_j\{\Delta Z(\mathbf{\Psi}^{(k)}, m^{(k)} - 1, v_j^{(k)} - 1)\}.$$

Знайти координату M або m, для якої $\tilde{\Delta}Z(M^{(k)}, m^{(k)}) = \max\{\tilde{\Delta}_R^L, \tilde{\Delta}_r^l\}$. $k := k+1$. Для вектора $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ встановити:

$$M^{(k)} := M^{(k-1)} - 1,\ u_L^{(k)} = 0,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}'_L, \text{ якщо } \tilde{\Delta}Z = \tilde{\Delta}_R^L;$$

$$m^{(k)} := m^{(k-1)} - 1,\ v_l^{(k)} = 0,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}''_l, \text{ якщо } \tilde{\Delta}Z = \tilde{\Delta}_r^l.$$

Перейти до кроку 4.

Алгоритм розв’язання задачі в двоїстій постановці

1. Задати нульовий варіант нечіткої моделі, $k := 0$: $\mathbf{\Psi}^{(0)} = (M^{(0)}, m^{(0)}, \mathbf{Y}_R^{(0)}, \mathbf{Y}_r^{(0)}, \mathbf{\Psi}_R^{(0)}, \mathbf{\Psi}_r^{(0)})$.

2. Якщо $Z(\mathbf{\Psi}^{(k)}) < \overline{Z}$, то перейти до кроку 3, інакше – до кроку 4.

3. Зміст цього кроку співпадає з кроком 3 попереднього алгоритму. Перейти до кроку 2.

4. Понизити складність моделі $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ для влучення в область допустимих розв’язків. Для моделей, у яких $u_J^{(k)} = 1$ і $v_j^{(k)} = 1$, зменшити кількість класів виходу наступним чином:

$$\mathbf{\Psi}'_J = (M^{(k)} - 1, m^{(k)}, u_J^{(k)} - 1, \mathbf{Y}_r^{(k)}, \mathbf{\Psi}_R^J, \mathbf{\Psi}_r^J),\ \mathbf{\Psi}''_j = (M^{(k)}, m^{(k)} - 1, \mathbf{Y}_R^{(k)}, v_j^{(k)} - 1, \mathbf{\Psi}_R^j, \mathbf{\Psi}_r^j).$$

Для відношень і правил знайти такі множини класів виходу $Q_R^{(k)}$ і $Q_r^{(k)}$, для яких виконуються умови:

$$Z(\mathbf{\Psi}'_J) > \overline{Z}; \tag{16}$$

$$Z(\mathbf{\Psi}''_j) > \overline{Z} . \qquad (17)$$

Якщо $Q_R^{(k)}$ і $Q_r^{(k)}$ – порожні множини, то вектор $\mathbf{\Psi}^{(k-1)}$ є розв’язком задачі, інакше перейти до кроку 5.

5. Для класів $D_J \in Q_R^{(k)}$ і $d_j \in Q_r^{(k)}$, які задовольняють умови (16) і (17), знайти величину, на яку збільшиться похибка виведення $\Delta E(\mathbf{\Psi}^{(k)})$. Знайти класи D_L і d_l, для яких

$$\widetilde{\Delta}_R^L(u_L^{(k)}) = \min_J\{\Delta E(\mathbf{\Psi}^{(k)}, M^{(k)}-1, u_J^{(k)}-1)\},\ \widetilde{\Delta}_r^l(v_l^{(k)}) = \min_j\{\Delta E(\mathbf{\Psi}^{(k)}, m^{(k)}-1, v_j^{(k)}-1)\}.$$

Знайти координату M або m, для якої $\widetilde{\Delta}E(M^{(k)}, m^{(k)}) = \min\{\widetilde{\Delta}_R^L, \widetilde{\Delta}_r^l\}$. $k := k+1$. Для вектора $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ встановити:

$$M^{(k)} := M^{(k-1)}-1,\ u_L^{(k)} = 0,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}'_L, \text{ якщо } \widetilde{\Delta}E = \widetilde{\Delta}_R^L;$$

$$m^{(k)} := m^{(k-1)}-1,\ v_l^{(k)} = 0,\ \mathbf{\Psi}^{(k)} := \mathbf{\Psi}''_l, \text{ якщо } \widetilde{\Delta}E = \widetilde{\Delta}_r^l.$$

Перейти до кроку 4.

Комп’ютерний експеримент

Експериментальні дані про об’єкт генерувались моделлю «два входи – один вихід» (рис.1):

$$y = ((2z-0.9)(7z-1)(17z-19)(15z-2))/10,$$

де $z = ((x_1-3.0)^2 + (x_2-2.5)^2)/40$.

Границі класів для відношень і правил були встановлені таким чином:

$$D_1 \in [0, 0.7),\ D_2 \in [0.7, 1.5),\ D_3 \in [1.5, 3.2];$$

$$d_1 \in [0, 0.3),\ d_2 \in [0.3, 0.6),\ d_3 \in [0.6, 0.9),\ d_4 \in [0.9, 1.6),$$

$$d_5 \in [1.6, 2.2),\ d_6 \in [2.2, 2.7), d_7 \in [2.7, 3.2].$$

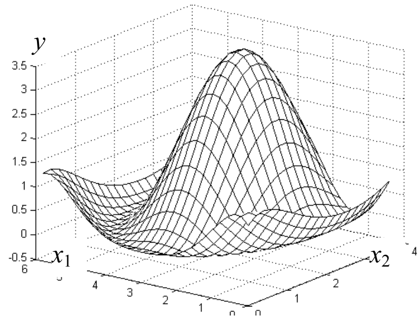

Рисунок 1 - Модель-еталон

Задача полягала у тому, щоб синтезувати нечітку базу знань, яка забезпечує необхідні або екстремальні рівні точності виведення і кількості правил, за рахунок вибору класів виходу із множини можливих класів $\{D_1,..., D_3\}$ і $\{d_1,..., d_7\}$.

Задача оптимізації сполученої бази знань може бути сформульована в прямій і двоїстій постановці.

Пряма постановка. Знайти вектори розстановки класів виходу для відношень $\mathbf{Y}_R$ і правил $\mathbf{Y}_r$, для яких $Z(\mathbf{Y}_R, \mathbf{Y}_r) \to min$ і $E(\mathbf{Y}_R, \mathbf{Y}_r) \le 0.5$.

Двоїста постановка. Знайти вектори розстановки класів виходу для відношень $\mathbf{Y}_R$ і правил $\mathbf{Y}_r$, для яких $E(\mathbf{Y}_R, \mathbf{Y}_r) \to min$ і $Z(\mathbf{Y}_R, \mathbf{Y}_r) < 20$.

Результати покрокового розрахунку задач оптимізації наведені в Табл. 1, де кожна ітерація представляє результати проектування поточної моделі $\mathbf{\Psi}^{(k)}$. Спочатку для поточного числа класів $M^{(k)}$ і вектора розстановки $\mathbf{Y}_R^{(k)}$ знаходиться вектор параметрів нечітких відношень $\mathbf{\Psi}_R^{(k)}$. Потім для поточного числа класів $m^{(k)}$ і вектора розстановки $\mathbf{Y}_r^{(k)}$ визначаються кількість правил $Z^{(k)}$ і вектор $\beta-$параметрів правил шляхом розв’язання отриманої системи рівнянь нечітких відношень. Остаточно, для отриманого набору правил визначається вектор параметрів $\mathbf{\Psi}_r^{(k)}$ і оцінюється похибка виведення $E^{(k)}$.

Таблиця 1 – Покроковий розрахунок задач оптимізації

k	M	m	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Z	E
1	2	4	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	6	1.1961
2	2	5	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	8	0.9687
3	3	5	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	16	0.5703
4	3	6	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	17	0.4580
5	3	5	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	16	0.4825
6	3	6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	19	0.4033
7	3	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0.3795

Нечіткі відношення і правила для моделей $\mathbf{\Psi}^{(k)}$ генерувались таким чином. Нечіткі відношення встановлені між нечіткими причинами і наслідками: c_{11} *– зниження до 0,* c_{12} *– наближення до 3.0* , c_{13} *– підвищення до 6.0* для x_1 ; c_{21} *– зниження до 0,* c_{22} *– наближення до 3.0* для x_2 ; D_1 *– зниження до 0,* D_2 *– наближення до 1.0,* D_3 *– підвищення до 3.2* для y .

Система рівнянь нечітких відношень для генерування правил - розв'язків має вигляд:

$$\mu^{D_1} = [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.98) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.22) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.98)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.29) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.96)]$$
$$\mu^{D_2} = [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.92) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.44) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.92)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.89) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.30)]$$
$$\mu^{D_3} = [(\mu^{c_{11}} \wedge 0.11) \vee (\mu^{c_{12}} \wedge 0.91) \vee (\mu^{c_{13}} \wedge 0.11)] \wedge [(\mu^{c_{21}} \wedge 0.12) \vee (\mu^{c_{22}} \wedge 0.94)] \quad (18)$$

За допомогою генетико-нейронного алгоритму [7] були отримані множини розв'язків для β–параметрів правил, представлені в Табл. 2, для яких значення критерію оптимізації (10) становить $F_1 = 0.0013,\ F_2 = 0.0225, F_3 = 0.0442, F_4 = 0, F_5 = 0.0100,\ F_6 = 0.0121, F_7 = 0.0064.$

Таблиця 2 – Множина розв'язків для β–параметрів правил

Правило	ЯКЩО		ТО			
	x_1	x_2	μ^{D_1}	μ^{D_2}	μ^{D_3}	y
1, 2 3 4, 5	[0, 1.35] або [4.67, 6.0] [0.40, 5.61] [0.57, 1.35] або [4.67, 5.43]	[2.55, 3.45] [0.90, 1.60] [0.90, 4.00]	0.76	0.28	0.15	d_1
6 7, 8 9, 10 11	[0.72, 5.31] [0, 0.40] або [5.60, 6.0] [0, 0.40] або [5.60, 6.0] [1.40, 4.61]	[0, 0.65] [0.65, 2.20] [3.80, 4.00] [1.40, 4.00]	0.51	0.45	0.11	d_2
12, 13 14	[0, 0.90] або [5.10, 6.0] [1.57, 4.43]	[0, 0.76] [1.74, 4.0]	0.20	0.38	0.10	d_3
15, 16 17	[0, 0.35] або [5.65, 6.0] [1.85, 4.15]	[0, 0.30] [2.10, 3.90]	0.45	0.80	0.39	d_4
18	[2.10, 3.90]	[2.21, 3.79]	0.12	0.36	0.51	d_5
19	[2.36, 3.64]	[2.43, 3.57]	0.11	0.30	0.67	d_6
20	[2.70, 3.30]	[2.73, 3.27]	0.14	0.30	0.90	d_7

Вибір класів виходу здійснювався таким чином. Перший допустимий розв'язок прямої задачі отриманий на 4-му кроці шляхом послідовного додавання класів з найбільшими градієнтами:

- класу d_2 на 2-му кроці, оскільки $\gamma_R^2(u_2) = (1.1961 - 0.8312)/(10-6) = 0.0912$, $\gamma_r^2(v_2) = (1.1961 - 0.9687)/(8-6) = 0.1137$, $\gamma_r^3(v_3) = (1.1961 - 1.0595)/(8-6) = 0.0683$, $\gamma_r^6(v_6) = (1.1961 - 1.1108)/(7-6) = 0.0853$;

- класу E_2 на 3-му кроці, оскільки $\gamma_R^2(u_2) = (0.9687 - 0.5703)/(16-8) = 0.0498$, $\gamma_r^3(v_3) = (0.9687 - 0.9065)/(10-8) = 0.0311$, $\gamma_r^6(v_6) = (0.9687 - 0.9224)/(9-8) = 0.0463$;

- класу d_6 на 4-му кроці, оскільки $\gamma_r^3(v_3) = (0.5703 - 0.4604)/(19-16) = 0.0366$, $\gamma_r^6(v_6) = (0.5703 - 0.4580)/(17-16) = 0.1123$.

Поліпшення допустимого розв’язку $\mathbf{\Psi}^{(4)}$ здійснено на 5-му кроці шляхом видалення класу d_5, оскільки видалення класу d_5 задовольняє умову (15) і залишає точність виведення в допустимій області при зменшенні кількості правил на $\Delta Z(\mathbf{\Psi}^{(5)})=1$. Отже, модель $\mathbf{\Psi}^{(5)}$ є розв’язком прямої задачі.

Розв’язання двоїстої задачі продовжувалось шляхом додавання класів з найбільшими градієнтами:

- класу d_3 на 6-му кроці, оскільки $\gamma_r^3(v_3) = (0.4825-0.4033)/(19-16) = 0.0264$, $\gamma_r^5(v_5) = (0.4825-0.4580)/(17-16) = 0.0245$;

- класу d_5 на 7-му кроці для спроби поліпшення першого допустимого розв’язку $\mathbf{\Psi}^{(6)}$, оскільки видалення кожного з класів задовольняє умову (17).

Зменшення числа правил ΔZ ($\mathbf{\Psi}^{(7)}$) для влучення в область допустимих розв’язків шляхом видалення класів складає: $\Delta Z(v_1=0)=5$, $\Delta Z(v_2=0)=6$; $\Delta Z(v_3=0)=3$, $\Delta Z(v_4=0)=3$; $\Delta Z(v_5=0)=1$, $\Delta Z(v_6=0)=1$, $\Delta Z(v_7=0)=1$. При цьому похибка виведення становить: $E(v_1=0)=0.6408$, $E(v_2=0)=0.7192$, $E(v_3=0)=0.4580$; $E(v_4=0)=0.5219$, $E(v_5=0)=0.4033$, $E(v_6=0)=0.4604$; $E(v_7=0)=0.4345$. Таким чином, модель $\mathbf{\Psi}^{(6)}$ залишається розв’язком двоїстої задачі. Поліпшення розв’язку $\mathbf{\Psi}^{(7)}$ шляхом видалення класу d_5 забезпечує влучення в область допустимих розв’язків з найменшою втратою точності виведення $\Delta E(\mathbf{\Psi}^{(7)})=0.0239$.

Результати структурної і параметричної настройки моделей $\mathbf{\Psi}^{(5)}$ і $\mathbf{\Psi}^{(6)}$, для яких компроміс «точність виведення - складність» досягається шляхом додавання/видалення класу d_3, показані на Рис. 2, 3.

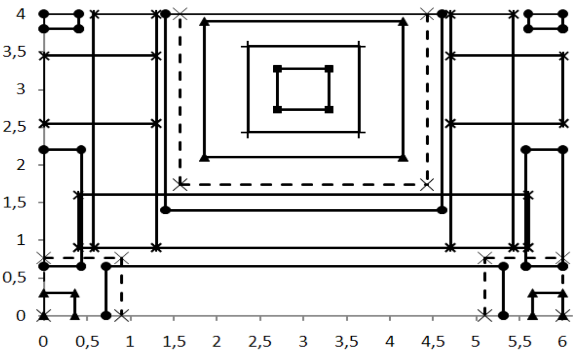

Рисунок 2 – Результати структурної настройки для розв’язку прямої і двоїстої задачі
(границі класів позначено: $*-d_1$; $\bullet-d_2$; $\times-d_3$; $\blacktriangle-d_4$; $+-d_6$; $\square-d_7$)

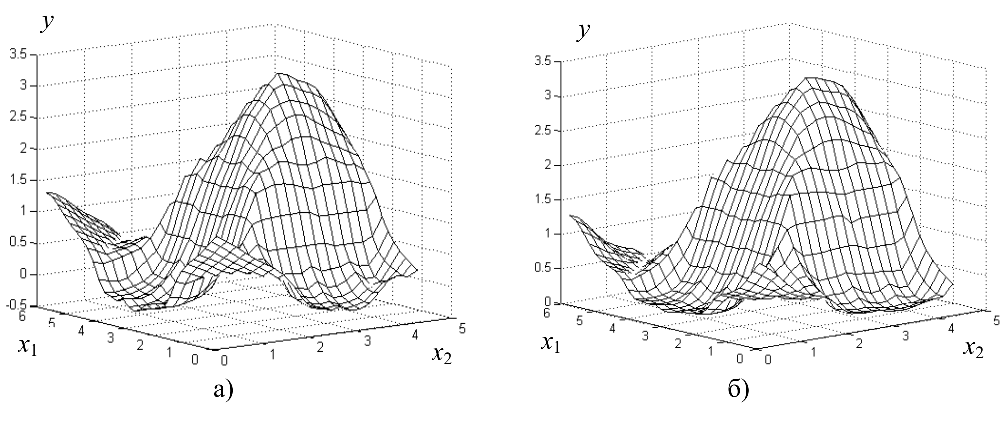

Рисунок 3 – Результати параметричної настройки для розв’язку прямої (а) і двоїстої (б) задачі

Складність задач оптимізації на кожному етапі проектування нечіткої бази знань оцінювалась наступним чином. Запропонований метод дозволяє замінити розв’язання задачі оптимізації з $Z \cdot 2n + Z$

змінними для двопараметричних функцій належності і ваг правил на розв'язання послідовності Z задач оптимізації з $2N$ змінними для верхніх і нижніх границь інтервалів. Побудова генератора правил на нечітких відношеннях потребує розв'язання задачі оптимізації з $MN + 2M + 2N$ змінними. Розстановка класів виходу потребує додатково розв'язання задачі оптимізації з $M + m$ бінарними змінними.

Висновки

1. Показано, що система класифікаційних правил ЯКЩО-ТО може бути перетворена до множини якісних розв'язків системи рівнянь нечітких відношень для заданих термів вихідної змінної або класів виходу. В таких правилах форма функцій належності нечітких термів визначається інтервалами значень вхідних змінних у розв'язках системи рівнянь нечітких відношень.
2. Розроблені моделі та алгоритми оптимізаційного проектування сполучених нечітких баз знань за критеріями «точність виведення - складність». Задача оптимізації сполученої нечіткої бази знань, яка зведена до задачі *min-max* кластеризації, полягає у виборі таких класів виходу, для яких інтервальні розв'язки системи рівнянь нечітких відношень забезпечують необхідні або екстремальні рівні точності виведення і кількості правил.
3. Отримано спосіб пониження складності задачі оптимізації сполученої нечіткої бази знань за рахунок поетапного генерування і селекції нечітких відношень і правил.

Список літератури

1. Yager R. Essentials of fuzzy modeling and control / R. Yager, D. Filev. – New York: John Willey & Sons, 1994. – 408 p. – ISBN 0-471-01761-2.
2. Pedrycz W. Knowledge-based fuzzy clustering / W. Pedrycz. – New York: John Willey, 2005. – 336 p. – ISBN 978-0-471-46966-7.
3. Gabrys B. General fuzzy min-max neural network for clustering and classification / B. Gabrys, A. Bargiela // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2000 – Vol. 11 (3). – pp. 769 – 783. – ISSN 1045-9227.
4. A new approach to division of attribute space for SVR based classification rule extraction / D. Zhang, A. Duan, Y. Fan et al. // Advances in Neural Networks. – 2008. – Vol. 5263. – pp. 691 – 700. – ISBN 978-3-540-87731-8.
5. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / А.П. Ротштейн. – Винница: УНІВЕРСУМ, 1999. – 320 с. – ISBN 966-7199-49-5.
6. Rotshtein A. Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis / A. Rotshtein, H. Rakytyanska. – Heidelberg: Springer, 2012. – 314 p. – ISBN 978-3-642-25785-8.
7. Ракитянська Г.Б. Нейро-мережевий підхід до генерування сполучених нечітких баз знань на правилах і відношеннях / Г.Б. Ракитянська // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2014. – №1(29). – С. 72 – 82. – ISSN 1999-9941.
8. Zadeh L. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language / L. Zadeh // Computers and Mathematics with Applications. – 1983. – Vol. 9. – P. 149-184. - ISSN 0898-1221.
9. Rotshtein A. Optimal design of rule-based systems by solving fuzzy relational equations / A. Rotshtein, H. Rakytyanska // Issues and Challenges in Artificial Intelligence. Studies in Computational Intelligence. – Vol. 559. – pp. 167 – 178. – Heidelberg: Springer, 2014. – ISSN 1860-949X.
10. Ротштейн А.П. Проектирование бездефектных человеко-машинных технологий / А.П. Ротштейн, П.Д. Кузнецов. – Київ: Техніка, 1992. – 180 с.

Стаття надійшла: 17.09.2015.

Відомості про авторів

Ракитянська Ганна Борисівна – к.т.н., доцент, докторант кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця