УДК 519.6:517.44

В. М. Дубовой, К. В. Казиміров, О. В. Олійник

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО ПІДХОДУ ДО ОПЕРАТОРНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Вступ

Переважна більшість інформаційних систем працює в умовах невизначеності різної природи. Джерелом невизначеності може бути недостатньо повне знання предметної області, недостатня інформація про конкретну ситуацію, недостатність достовірної інформації про значення параметра системи, яка може бути викликана багатьма причинами, недостатність достовірної інформації про значення даного, яка може бути зумовлена багатьма причинами. Ступінь неповноти інформації зумовлена способами отримання інформації та її достовірності. Врахування невизначеності впливає на методологію проектування та оптимізації систем управління. Тому **проблема** моделювання та аналізу систем управління в умовах невизначеності є **актуальною**.

На сьогоднішній день існує декілька підходів до розв’язання проблеми невизначеності при моделюванні систем управління. Слід відзначити історично перший підхід до врахування невизначеності – врахування невизначеності стохастичними методами, тобто з застосуванням апарата теорії імовірності [1]. В цій групі методів невизначена величина розглядалася як випадкова величина з відповідними характеристиками. Система управління розглядалася як сукупність блоків, які здійснюють відповідні перетворення над характеристиками цих випадкових величин [2]. Але надмірна складність математичних характеристик перетворювачів призвела до поступового переходу до інших методів врахування невизначеності.

Паралельно із стохастичними методами як їх альтернатива розвинулася теорія нечітких множин, яка замість імовірності пропонувала розглядати ступінь належності [3]. Ця теорія дозволяла найповніше враховувати невизначеність експертних оцінок.

В [6] викладений метод моделювання широкого класу інформаційних систем в умовах комбінованої стохастичної та нечіткої невизначеності. Метод ґрунтується на перетворенні характеристик невизначеності (щільності розподілу ймовірності стохастичних даних $f(x)$ і функції належності нечітких даних $\mu(x)$) на узагальнювальні функції $\beta(x)$ і моделювання їх перетворень за допомогою інтегральних операторів виду

$$\beta(y)=\int n \int_{\Omega_X} \beta(x)\phi(x,y)dx\,, \tag{1}$$

де $\phi(x,y)$ – ядро перетворення, яке залежить від характеристик системи, що моделюється.

Кратність інтегрування n в операторі (1) визначається розмірністю вектора вхідних даних та складністю перетворення. Так, наприклад, при моделюванні нелінійного унарного статичного перетворення кратність інтегрування 1, лінійного бінарного статичного перетворення – 2, нелінійного бінарного статичного перетворення – 3 (воно представляється композицією лінійного бінарного і нелінійного унарного перетворень), лінійного динамічного перетворення – n (воно представляється композицією n лінійних бінарних перетворень, де n залежить від порядку передаточної функції перетворення). Для реальної системи кратність інтегрування може досягати десятків, що при чисельній реалізації навіть на комп’ютері з високою швидкодією займає досить багато часу.

Таким чином можна сформулювати **задачу** підвищення швидкості моделювання операторним методом.

Результати

При стохастичному представленні невизначеної інформації існує представлення закону розподілу в інтервальному вигляді за допомогою функцій від імовірності потрапляння випадкової величини в інтервал (рис.1,а), тобто представлення функції розподілу через сукупність довірчих інтервалів [4]. При нечіткому представленні невизначеної інформації існує можливість представлення функції приналежності нечіткого числа у α-рівневому вигляді (рис.1,б) за допомогою LR-форми [3]. Таким чином є можливість представити нечітку і стохастичну невизначеність за допомогою інтервального числення [5].

Оскільки під час розв'язання пропонованої задачі виникає необхідність поєднання стохастичної та нечіткої невизначеностей в інформації, то для розв'язання цієї проблеми пропонується застосувати метод узагальнювальних функцій (УФ) [6], який дозволяє поєднувати два вида невизначеностей в межах однієї моделі. До того ж однією з можливих форм запису УФ є запис за допомогою довірчих інтервалів.

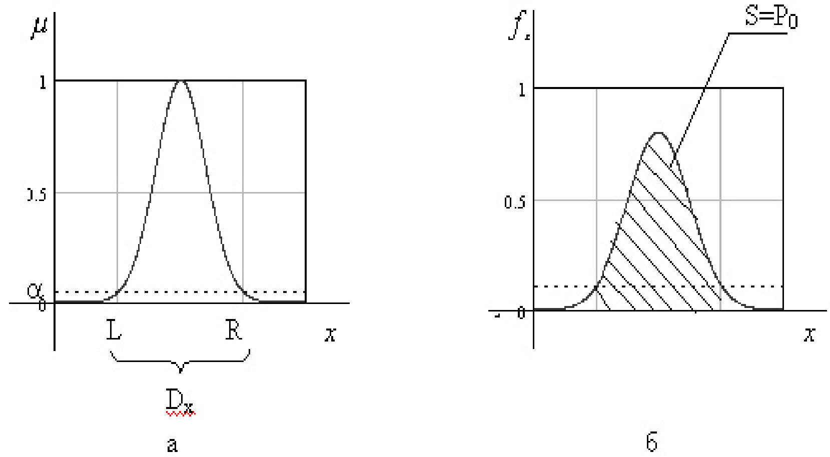

Рис. 1. Різні форми невизначеностей в інтервальному вигляді

а) LR-форма на α–рівні; б) довірчий інтервал

Будь-яку систему управління можна представити за допомогою комбінації таких перетворювачів [2]:

- лінійні статичні перетворювачі;
- нелінійні статичні перетворювачі однієї невизначеної величини (логарифмування, піднесення до степеня тощо);
- нелінійні бінарні перетворювачі (додавання, множення тощо);
- лінійні динамічні перетворювачі (інтегрування за часом, диференціювання за часом тощо).

Наявний математичний апарат інтервального аналізу [5] дозволяє виконати вищенаведені перетворення, за умови отримання результуючого інтервалу з характеристиками, які відповідають характеристикам початкових інтервалів та узагальнювальних функцій.

На першому етапі отримані результати для випадків лінійних та нелінійних перетворювачів одного аргументу.

Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Тоді під *інтервалом* [a, b], $a \le b$, якщо не обумовлено іншого, будемо розуміти замкнуту обмежену підмножину R виду:

$$[a,b] = \{x \mid x \in R \wedge a \le x \le b\}, \quad (2)$$

Множину всіх інтервалів позначимо через **I(R)**. Елементи множини **I(R)** будемо позначати прописними літерами. Якщо X – елемент **I(R)**, $X \in I(R)$, то його правий і лівий кінці будемо позначати як $\underline{x};\overline{x}$ **:** $\mathbf{X} = [\underline{x};\overline{x}]$. Елементи **I (R)** інтервальні числа.

Символи $\in, \cap, \cup$ тощо розуміються в звичайному теоретико-множинному розумінні, причому $\subset$ позначає не обов'язково строге включення, тобто співвідношення $A \subset B$ допускає рівність інтервалів. Два інтервала А і В *рівні* тоді і тільки тоді, коли $\underline{a} = \underline{b}, \overline{a} = \overline{b}$.

Вироджений інтервал, тобто інтервал зі збіжними кінцями $\underline{a} = \overline{a} = a$, ототожнимо з дійсним числом а. Таким чином, $R \in I(R)$.

При проведенні інтервального моделювання всі операції необхідно проводити в рамках інтервальної арифметики. Класична інтервальна арифметика - це алгебраїчна система $\langle IR, +, -, \cdot, / \rangle$, носій якої **IR** утворений інтервалами дійсної осі $\mathbf{R}[\underline{x}, \overline{x}]$, $\underline{x} \leq \overline{x}$, а бінарні операції додавання, віднімання, множення і ділення визначені таким чином, що фундаментальна властивість

$$x * y = \{x * y \mid x \in x, y \in y\}, \tag{3}$$

повинна виконуватись для всіх інтервалів **x, y**, таких що (x * y), * ∈ { +, -, •, /), вірне для всіх x∈**x**, y∈**y**.

Відповідно до цього можна визначити основні арифметичні операції з інтервалами. За допомогою основних алгебраїчних операцій та властивостей інтервального обчислення можливо отримати набір функцій для інтервальних чисел. Якщо ще врахувати ряд співвідношень між окремими функціями, то стає можливим отримати необхідні вирази для реалізації майже всіх елементарних функцій. [5]

Подання будь-якої загальної функції g^R у вигляді інтервальної функції g^{IR} є однією з найважливіших проблем інтервального аналізу.

Інтервальним розширенням функції $g^R(x)$, $x \in R$, називають такий елемент g^{IR} **(X)**, $\mathbf{X} \in \mathbf{IR}$, що при $x \in X$ виконується умова $g^R(x) \in g^{IR}(\mathbf{X})$.

Інтервальне розширення позначається як:

$$\underset{x \to X}{Di}\, g^R(x) = g^{IR}(X), \tag{4}$$

Функція g^{IR}**(X),** що отримана заміною дійсного аргументу x в раціональній функції $g^R(x)$ інтервальним аргументом X з переходом в інтервальну арифметику, називається природним інтервальним розширенням.

Шляхом оператора **Di** можна перейти до дій над інтервалами.

Зворотною операцією щодо інтервального розширення є інтервальне звуження.

Застосування інтервальних засобів припускає побудову інтервальних розширень, на які накладаються умови найбільшої звуженості.

Розглянемо застосування інтервальних операцій до моделювання перетворень узагальнювальних функцій невизначеності в нелінійних унарних перетвореннях.

Відповідно до [6] для оцінки узагальнювальної функції β_y результату нелінійного перетворення $y = N(x)$ вхідного сигналу X з узагальнювальною функцією β_x потрібно застосовувати таку формулу:

$$\beta_y = \dot{N}^{-1}(y) \cdot \beta_x \left[N^{-1}(y)\right], \tag{5}$$

Але поступовий обрахунок всіх функцій, які входять до формули (5), є складним та довгим процесом за будь-якої більш-менш складної функції $N(x)$. Застосуємо для їх перетворення інтервальну математику, що дозволить значно спростити і пришвидшити процес отримання результату.

Перетворення здійснюється у такій послідовності:

- На узагальнювальній функції вхідного сигналу β_x на потрібному рівні отримується інтервал D_x, який задовольняє умову $\int_{D_x} \beta_x(x)dx = C$.
- За допомогою природного інтервального розширення з функції $N(x)$ отримується її інтервальний відповідник : $N^{IR}(X)$.
- Використовуємо отриманий інтервал D_x як аргумент інтервальної функції $N^{IR}(X)$.
- Як результат отримуємо інтервал D_y.

Приклади застосування запропонованої методики наведені на рис. 2. Легко довести, що отриманий таким способом інтервал буде задовольняти основну умову

$$\int_{D_y} \beta_y(y)dy = \int_{D_x} \beta_x(x)dx$$

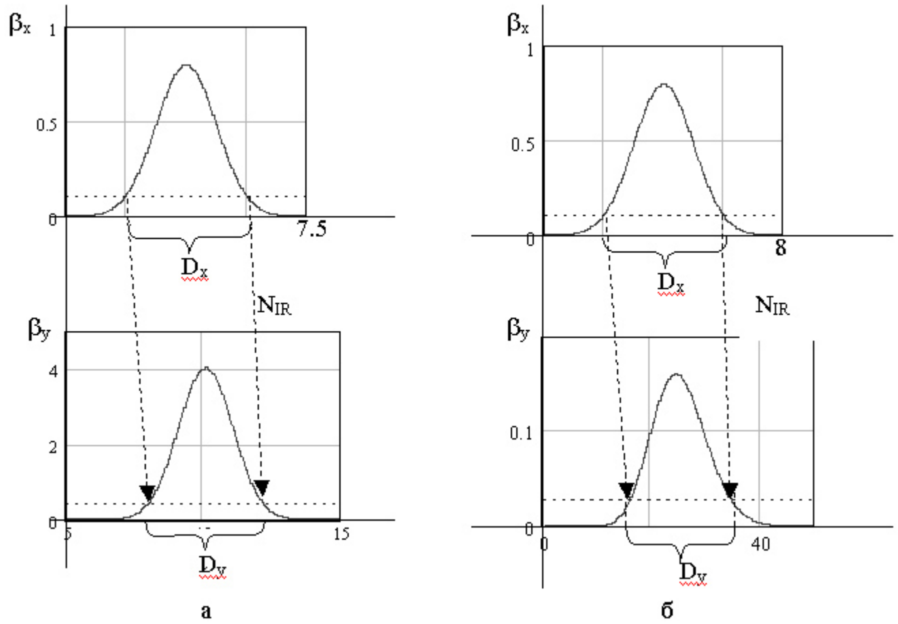

Рис. 2. Лінійне і нелінійне перетворення меж інтервалу

а) лінійне : $N(x)=2x$ $D_x:[4;6] \xrightarrow{N_{IR}} D_y:[4;12]$

б) нелінійне : $N(x)=x^2$ $D_x:[4;6] \xrightarrow{N_{IR}} D_y:[16;36]$

Важливою умовою застосування інтервального підходу є однозначність представлення УФ у інтервальній формі. На рис. 3 показані приклади УФ, для яких можливе (а) і неможливе (б) інтервальне

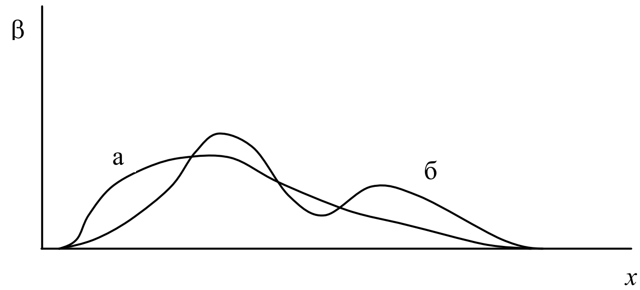

Рис. 3. Приклади узагальнювальних функцій

представлення. Очевидно, що для забезпечення однозначності представлення повинна виконуватися умова унімодальності. Але для виконання інтегрування в операторі (1) при інтервальному представленні унімодальною повинна бути не тільки УФ, але й добуток

$$F(x,y)=\beta(x)\varphi(x,y). \tag{6}$$

Проаналізуємо необхідні умови унімодальності функції F(x,y). Можливі варіанти унімодальних функцій показані на рис.4.

Очевидно, функція F(x,y) буде унімодальною, якщо на області визначення вона має три інтервали монотонності: інтервал монотонного зростання, інтервал стаціонарності і інтервал монотонного спадання. У загальному випадку кожен з інтервалів може містити лише одну точку.

Якщо функція диференційована на інтервалі, то її монотонність означає постійність знаку першої похідної

$$F'(x,y) = \beta'(x)\phi(x,y) + \beta(x)\phi'(x,y) \tag{7}$$

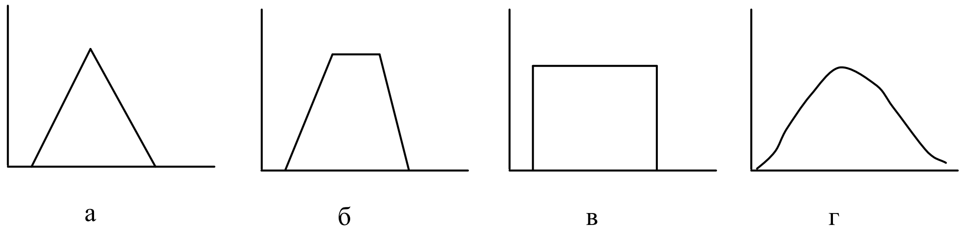

Рис. 4. Унімодальні функції

На інтервалі зростання $F'(x,y) > 0$, на інтервалі стаціонарності $F'(x,y) = 0$, на інтервалі спадання $F'(x,y) < 0$. Розглянемо розв'язок нерівності

$$\beta'(x)\phi(x,y) + \beta(x)\phi'(x,y) <> 0 \tag{8}$$

де знак <> означає один з символів відношення рівності/нерівності. Враховуючи, що УФ і ядро перетворення є додатно визначені, нерівність (4) може бути представлена у вигляді

$$\frac{\phi'(x,y)}{\phi(x,y)} <> -\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} \tag{9}$$

З нерівності (9) видно, що у випадках, коли інтервали монотонності УФ і ядра перетворення збігаються, нерівність виконується, оскільки на інтервалі зростання $\phi'(x,y) > 0$, $-\beta'(x) < 0$, отже $\frac{\phi'(x,y)}{\phi(x,y)} > -\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}$. На інтервалі спадання $\phi'(x,y) < 0$, $-\beta'(x) > 0$, отже $\frac{\phi'(x,y)}{\phi(x,y)} < -\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}$. На інтервалі стаціонарності $\frac{\phi'(x,y)}{\phi(x,y)} = -\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} = 0$. У випадках, коли інтервал зростання ядра збігається з інтервалом стаціонарності УФ або інтервал стаціонарності ядра збігається з інтервалом спадання УФ нерівність (9) теж виконується. Для решти випадків умова (9) не виконується, отже функція $F(x,y)$ не є унімодальною.

Оскільки ядро $\phi(x,y)$ задається з параметром *y*, який впливає на зсув ядра вздовж вісі *Ox*, то всю область значень параметра Ω_y можна розділити на дві підобласті: Ω_y^1, в якій умова унімодальності виконується, і Ω_y^2, в якій умова унімодальності не виконується. Відповідно, в першій підобласті можливий прискорений інтервальний спосіб інтегрування в перетворенні (1), а в другій підобласті необхідно застосовувати один з класичних чисельних методів інтегрування.

Висновки

Запропонована методика отримання довірчих інтервалів після функціонального перетворення вхідної величини та виконання інтегральних перетворень дозволяє значно пришвидшити та спростити процес моделювання та аналізу систем управління в умовах комбінованої стохастичної та нечіткої невизначеностей. Подальший розвиток отриманих результатів дозволить спростити чисельні алгоритми виконання всіх операцій над узагальнювальними функціями.

Список літератури

1. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960.

2. Анализ измерительных информационных систем. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. – Ташкент: Фан, 1984. – 176 с.

3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Поспелова Д.А. – М.: Наука, 1986. – 312с.

4. Колемаев В.А. и др. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.

5. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. - Новосибирск: Наука, 1981. - 112с.

6. Дубовой В.М., Глонь О.В. Моделювання систем керування в умовах невизначеності. – В.: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 170 с.

Дубовой Володимир Михайлович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри КСУ, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, 21021, Україна, тел.: (0432) 440157, E-Mail: dub@faksu.vstu.vinnica.ua

Казиміров Костянтин Володимирович, студент, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, 21021, Україна, тел.: (0432) 32-04-61, E-Mail: kons_kaz@ukr.net

Олійник Ольга Вікторівна, студентка, Вінницький національний технічний університет, Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, 21021, Україна, тел.: (0432) 46-07-72, E-Mail: oliynykolya@bigmir.net