УДК 519.7

И. С. ТКАЧЕНКО, М. И. СЕМЕНОВИЧ

УСТАНОВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В статье рассмотрено установление взаимосвязей между последовательностями чисел Фибоначчи и чисел Люка, используя при этом обратные гиперболические функции Фибоначчи и функции Люка. Это дало возможность определять номер числа в последовательности, зная само число Фибоначчи или число Люка.

Анотація. В статті досліджено визначення взаємозв’язку між послідовностями чисел Фібоначчі та чисел Люка, використовуючи при цьому обернені гіперболічні функції Фібоначчі та функції Люка. Це дало можливість визначати номер числа в послідовності, знаючи саме число Фібоначчі або число Люка.

Abstract. This article deals with the establishment of linkages between the sequences of Fibonacci numbers and Lucas numbers, using the inverse hyperbolic function of the Fibonacci functions and Lucas functions. This made it possible to determine the number of sequence elements, knowing the exact Fibonacci number or Lucas number.

Введение

Использование некоторых свойств чисел Фибоначчи при создании средств обработки информации стимулирует исследователей к поиску их новых возможностей [1]. Известно [2], что числа Фибоначчи и Люка являются элементами соответствующих последовательностей

-8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … (1)

и

…, -11, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 28, 47, 76, 123, 199, 322, … (2)

которые формируются с помощью формулы Бине

$$\varphi(n)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{3}$$

для последовательности (1) и соотношения

$$L(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{4}$$

для последовательности (2).

Учитывая, что $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ и, положив $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$, имеем $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}=-\varphi^{-1}$, а также, принимая во внимание четность и нечетность числа n, формула (3) может быть представлена в виде двух соотношений

$$f(2k)=\frac{\varphi^{2k}-\varphi^{-2k}}{\sqrt{5}},\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{5}$$

и

$$f(2k+1)=\frac{\varphi^{2k+1}-\varphi^{-2k-1}}{\sqrt{5}},\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots), \tag{6}$$

позволяющих разделить последовательность (1) на две последовательности

(1^I)

…, 34, 13, 5, 2, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, …, (1^II)

а соотношение (4) — в виде

$$L(2k+1)=\varphi^{2k+1}-\varphi^{-2k-1},\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{7}$$

и

$$L(2k)=\varphi^{2k}-\varphi^{-2k},\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots), \tag{8}$$

разделяющих последовательность (2) на две последовательности:

…, -11, -4, -1, 0,1, 4, 11, 29, 76, … (2^I)

…, 47, 18, 7, 3, 2, 3, 7, 18,47, … . (2^II)

Сравнивая соотношения (5) – (8) с гиперболическими функциями

$$\operatorname{sh}(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2} \tag{9}$$

и

$$\operatorname{ch}(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2} \tag{10}$$

обнаружим не только их внешнюю схожесть, но и взаимосвязь между ними и тригонометрическими функциями, а вводя соответствующие обозначения, получим функции Фибоначчи

$$\mathrm{sf}t = \frac{\varphi^{2t}-\varphi^{-2t}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{2t\ln\varphi}-e^{-2t\ln\varphi}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{sh}(2t\ln\varphi) = -\frac{2i}{\sqrt{5}}\sin(2ti\ln\varphi), \quad (11)$$

$$\mathrm{cf}t = \frac{\varphi^{2t+1}+\varphi^{-2t-1}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{(2t+1)\ln\varphi}+e^{-(2t+1)\ln\varphi}}{\sqrt{5}} = = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{ch}\big((2t+1)\ln\varphi\big) = \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\big((2t+1)i\ln\varphi\big) \quad (12)$$

и функции Люка

$$\mathrm{sl}t = \varphi^{2t+1}-\varphi^{-2t-1} = e^{(2t+1)\ln\varphi}-e^{-(2t+1)\ln\varphi} = = 2\mathrm{sh}\big((2t+1)\ln\varphi\big) = -2i\sin\big((2t+1)i\ln\varphi\big), \quad (13)$$

$$\mathrm{cl}x = \varphi^{2t}+\varphi^{-2t} = e^{2t\ln\varphi}+e^{-2t\ln\varphi} = 2\mathrm{ch}(2t\ln\varphi) = 2\cos(2ti\ln\varphi), \quad (14)$$

которые определены для любого действительного числа t и графическое представление задано в таблице 2 по диагональным клеткам. Свойства этих функций более подробно нашли свое рассмотрение в работе [3]. Для целочисленных значений [t] соотношения (11) и (12) формируют две последовательности (1^{I}) и (1^{II}), а соотношения (13) – (14) — две другие последовательности (2^{I}) и (2^{II}).

Цель исследования

Задавшись соответствующим номером $k = [t] \in\ ]-\infty, +\infty[$, с помощью известных формул (3), (4) и полученных соотношений (11) – (14) сформировать последовательности чисел Фибоначчи и Люка на основе свойств соответствующих обратных функций Фибоначчи и Люка целочисленного аргумента.

Однако, на практике встречается и задача обратного характера, то есть, зная, что, число Фибоначчи или Люка принадлежит той или иной последовательности (1^{I}), (1^{II}), (2^{I}), (2^{II}), необходимо найти его номер в этой последовательности.

На основе свойств этих функций установим геометрические места точек, определяемых как взаимосвязи между ними.

Метод исследования

Решение поставленной задачи осуществляется путем введения обратных функций Фибоначчи и обратных функций Люка.

Функцию вида $y = \mathrm{asf}x$ назовем обратным синусом Фибоначчи, где $x = \mathrm{sf}t$:

Пусть $x = \mathrm{sf}t = \frac{\varphi^{2t}-\varphi^{-2t}}{\sqrt{5}}$ или $\varphi^{4t} - x\sqrt{5}\varphi^{2t} - 1 = 0$, положив $\varphi^{2t} = y$, тогда $y^2 - x\sqrt{5}y - 1 = 0$ и, решая это уравнение относительно y, получим

$$y_{1,2} = \frac{x\sqrt{5}\pm\sqrt{5x^2+4}}{2},$$

а, следовательно

$$y_{1,2} = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}\pm\sqrt{5x^2+4}}{2}\right|, \quad (15)$$

то есть

$$y = \mathrm{asf}x = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}}{2}\right|, \text{ при } x > 0, \quad (16)$$

$$y = \mathrm{asf}x = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{5x^2+4}}{2}\right|, \text{ при } x < 0. \quad (17)$$

Аналогично определим обратный косинус Фибоначчи:

$$y = \mathrm{acf}u = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{u\sqrt{5}+\sqrt{5u^2-4}}{2\varphi}\right|, \text{ при } u > 0, \quad (18)$$

$$y = \mathrm{acf}u = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{u\sqrt{5}-\sqrt{5u^2-4}}{2\varphi}\right|, \text{ при } u < 0, \quad (19)$$

а также обратный синус Люка:

$$y = \mathrm{asl}v = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{v+\sqrt{v^2+4}}{2\varphi}\right|, \text{ при } v > 0, \quad (20)$$

$$y = \mathrm{asl}v = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{v-\sqrt{v^2+4}}{2\varphi}\right|, \text{ при } v < 0 \quad (21)$$

и косинус Люка

$$y = \mathrm{acl}z = \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right|, \text{ при } z > 0, \quad (22)$$

$$y - \mathrm{acl}z - \frac{1}{2\ln\varphi}\ln\left|\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}\right|, \text{ при } z < 0. \quad (23)$$

Основные результаты исследования

Установим взаимосвязь между этими функциями. В частности, между соотношениями(16) и (18), (20) и (22), (16) и (22), (18) и (20), (16) и (20), (18) и (22) получим следующие их места геометрических точек.

1. Взаимосвязь между $y = \mathrm{asf}x$ и $y = \mathrm{acf}u$, то есть (16) и (18):

$$\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}}{2} = \frac{u\sqrt{5}+\sqrt{5u^2-4}}{2\varphi};$$

$$\varphi x\sqrt{5} + \varphi\sqrt{5x^2+4} = u\sqrt{5} + \sqrt{5u^2-4};$$

$$\left(\varphi x\sqrt{5} - u\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{5u^2-4} - \varphi\sqrt{5x^2+4}\right)^2;$$

$$5\varphi^2x^2 - 10\varphi xu + 5u^2 = 5u^2 - 4 - 2\varphi\sqrt{(5u^2-4)(5x^2+4)} + \varphi^2u^2 + \\ +4\varphi^2,$$

учитывая, что $\varphi^2 - 1 = \varphi$ имеем $4\varphi^2 - 4 = 4\varphi$

$$(5xu+2)^2 = 25x^2u^2 - 20x^2 + 20u^2 - 16;$$

$$25x^2u^2 + 20ux + 4 = 25x^2u^2 - 20x^2 + 20u^2 - 16;$$

$$20u^2 - 20ux - 20x^2 - 20 = 0;$$

$$u^2 - ux - x^2 - 1 = 0. \quad (24)$$

Пример: Для $x = 21$; $\mathrm{asf}21 = 4 = y$; $u = 34$; $\mathrm{acf}34 = 4 = y$;
$34^2 - 34\cdot 21 - 21^2 - 1 = 0$, то есть $1156 - 714 - 441 - 1 = 0$, или $0 \equiv 0$.

Полученное уравнение второго порядка (24), представляет собой уравнение гиперболы с центром координат $O(0;0)$. Наличие в нем произведения u на x в виде слагаемого, свидетельствует о том, что гипербола имеет некоторый наклон к осям Ox и Ou. Поворот их на угол α приведет его к каноническому уравнению гиперболы в новой системе координат [4].

Преобразуем уравнение (24) путем поворота осей координат согласно формулам перехода к новой системе координат

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - u'\sin\alpha; \\ u = x'\sin\alpha + u'\cos\alpha. \end{cases} \quad (25)$$

получим

$$(x'\sin\alpha + u'\cos\alpha)^2 - (x'\cos\alpha - u'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + u'\cos\alpha) -$$

$$-(x'\cos\alpha - u'\sin\alpha)^2 - 1 = 0;$$

$$(x')^2(\sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha) + x'u'(4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \\ +$$

$$+(u')^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)-1=0.$$

Учитывая, что $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha$; $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$, получим

$$(x')^2\left(-\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right)+x'u'(2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)+$$

$$+(u')^2\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)-1=0 \qquad (26)$$

Так как при повороте осей координат должно выполняться соотношение $2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=0$, или $\tan 2\alpha=\frac{1}{2}$, то есть коэффициент при произведении $x'u'$ должен быть равен нулю, имеем:

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx 0{,}2318238(RAD) \qquad (27)$$

или

$$\alpha=13{,}28252559(DEG)=14^{\circ}45'30{,}1''.$$

Подставляя значения (27) в (26), получим

$$(x')^2(-0{,}894427191-0{,}223606792)+$$

$$+(u')^2(0{,}894427191+0{,}223606792)=1,$$

или

$$-(x')^2(1{,}118033988)+(u')^2(1{,}118033988)=1. \qquad (28)$$

Учитывая, что $(1{,}118033988)^{-1}=0{,}894427191=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{2}$, получим для выражения (28) следующее соотношение:

$$-\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}\right)^2}+\frac{(u')^2}{\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}\right)^2}=1, \qquad (29)$$

что представляет собой уравнение равнобочной гиперболы с асимптотами $u'=\pm x'$ и полуосями $a=b=\sqrt{\frac{2\varphi}{2+\varphi}}$, повернутыми на угол $\alpha=14^{\circ}45'30{,}1''$ против часовой стрелки.

Таким образом, геометрическое место точек, связывающее синус Фибоначчи и косинус Фибоначчи, есть гипербола вида (24) или (29), что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке.

2. Взаимосвязь между $y=\mathrm{aslv}$ и $y=\mathrm{aclz}$, то есть (20) и (22):

$$\frac{v+\sqrt{v^2+4}}{2\varphi}=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$$

и выполняя преобразования, аналогичные предыдущему пункту, получим

$$v^2-vz-z^2+5=0, \qquad (30)$$

а также осуществляя поворот осей $0v$ и $0z$, получим, что $\tan 2\beta--\frac{1}{2}$ или $\beta=-0{,}2318238(RAD)$, то есть $\beta=-14^{\circ}45'30{,}1''$. Приводя уравнение (30) к каноническому виду, получим

$$-\frac{(v')^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{\varphi-0{,}5}}\right)^2}+\frac{(z')^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{\varphi-0{,}5}}\right)^2}=1. \qquad (31)$$

Вновь получаем равнобочную гиперболу с асимптотами $v' = \pm z'$ и полуосями $a = b = \sqrt{\frac{5}{\varphi - 0,5}}$, повернутыми на $\beta = 14°45'30,1''$ по часовой стрелке.

Следовательно, геометрическое место точек, связывающее синус Люка и косинус Люка есть гипербола (30) или (31), что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке, где значения $z = \mathrm{clt}$ всегда принадлежит полуинтервалу $[0, \infty)$, поэтому все значения v рассматриваются на полуплоскости, состоящей из первого и четвертого квадрантов.

Например: $v = 29$; $\mathrm{asl}29 = 4 = y$; $z = 18$; $\mathrm{acl}18 = 4 = y$ имеем

$$29^2 - 29 \cdot 18 - 18^2 + 5 = 0;$$

или

$$841 - 522 - 324 + 5 = 0;$$

$$846 - 846 = 0;\ 0 \equiv 0.$$

3. Взаимосвязь между обратным синусом Фибоначчи $y = \mathrm{asf}x$ и обратным косинусом Люка $y = \mathrm{acl}z$, то есть (16) и (22):

$$\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}}{2} = \frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2};$$

$$\left(x\sqrt{5} - z\right)^2 = \left(\sqrt{z^2-4} - \sqrt{5x^2+4}\right)^2;$$

$$5x^2 - 2xz\sqrt{5} + z^2 = z^2 - 4 - 2\sqrt{(z^2-4)(5x^2+4)} + 5x^2 + 4;$$

$$xz\sqrt{5} = \sqrt{(z^2-4)(5x^2+4)};$$

$$z^2 - 5x^2 = 4; \tag{32}$$

или

$$\frac{z^2}{(2)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1. \tag{33}$$

Итак, геометрическим местом точек объединяющим обратный синус Фибоначчи и обратный косинус Люка есть неравносторонняя гипербола с полуосями $a = 2$ и $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и асимптотами $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}z$, что графически представлено в таблице 2 в соответствующей клетке.

4. Взаимосвязь между обратным косинусом Фибоначчи $y = \mathrm{acf}u$ и обратным синусом Люка $y = \mathrm{asl}v$, то есть (18) и (20):

$$\frac{u\sqrt{5}+\sqrt{5u^2-4}}{2\varphi} = \frac{v+\sqrt{v^2+4}}{2},$$

или, выполнив аналогичные преобразования, как в предыдущем пункте, получим

$$5u^2 - v^2 - 4 = 0, \tag{34}$$

или

$$\frac{u^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{v^2}{(2)^2} = 1, \tag{35}$$

Следовательно, геометрическим местом точек взаимосвязи обратного косинуса Фибоначчи и обратного синуса Люка есть также неравносторонняя гипербола с асимптотами $u = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}v$, и полуосями $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $b = 2$, график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

5. Взаимосвязь между обратным синусом Фибоначчи $y = \mathrm{asf}x$ и обратным синусом Люка $y = \mathrm{asl}v$, то есть (16) и (20):

$$\frac{x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}}{2}=\frac{v+\sqrt{v^2+4}}{2\varphi};$$

$$\varphi\left(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+4}\right)=\left(v+\sqrt{v^2+4}\right);$$

$$\left(\varphi x\sqrt{5}-v\right)^2=\left(\sqrt{v^2+4}-\sqrt{5x^2+4}\right)^2;$$

$$\left[\varphi vx\sqrt{5}+2(\varphi^2+1)\right]^2=\varphi^2(5v^2x^2+20x^2+4v^2+16).$$

Учитывая, что $\varphi^2+1=\varphi\sqrt{5}$, получим общее уравнение гиперболы:

$$5x^2-5xv+v^2-1=0. \tag{36}$$

Выполняя поворот осей, аналогично предыдущим случаям, с помощью формул (25) найдем угол поворота:

$$\tan 2\gamma=-\frac{5}{4},\ \gamma=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)\approx-0{,}448027692(RAD),$$

то есть

$$\gamma=-25{,}670096(DEG)=-28°31'20{,}38''.$$

Это соответствует повороту осей системы координат по часовой стрелке и сведением уравнения (36) к каноническому виду гиперболы с полуосями a =0,40155908 и $b=2{,}227379434$:

$$\frac{(x')^2}{(0{,}40155908)^2}-\frac{(v')^2}{(2{,}227379434)^2}=1, \tag{37}$$

график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

6. Взаимосвязь же между обратным косинусом Фибоначчи $y=\mathrm{acf}v$ и обратным косинусом Люка $y=\mathrm{acl}z$, то есть (18) и (22), найдем, выполнив преобразования, аналогичные сделанным в предыдущем пункте, что соответствует геометрическому месту точек их взаимосвязи, то есть уравнению гиперболы с полуосями $a=2{,}227379434$ и $b=0{,}40155908$

$$z^2-5uz+5u^2+1=0, \tag{38}$$

или производя поворот осей координат на угол $\eta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{5}{4}=0{,}448027692(RAD)$, то есть $\eta=28°31'20{,}38''$ против часовой стрелки, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(z')^2}{(2{,}227379434)^2}-\frac{(u')^2}{(0{,}40155908)^2}=1, \tag{39}$$

график которой представлен в таблице 2 в соответствующей клетке.

Из графика видно, что линия взаимосвязей обеих ветвей расположена в первом квадранте, поскольку обе функции являются четными.

Аналогичные результаты получаются и для соответствующих пар функций при $x<0$, $u<0$, $v<0$ и $z<0$, то есть для следующих пар соотношений (17) и (19); (21) и (23); (19) и (21); (17) и (21); (19) и (23).

Таким образом, для соответствующих значений k, согласно формулам (5), (6), (7), (8), полученные геометрические места точек (24), (30), (32), (34), (36) и (38) определяют их взаимные связи, что позволяет определить переход от одной последовательности чисел к другой и обратно.

Выводы

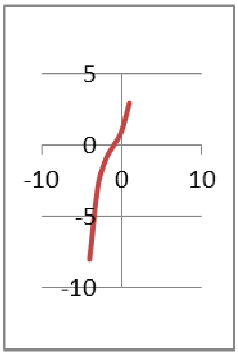
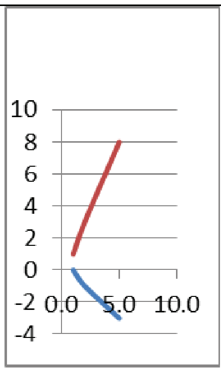
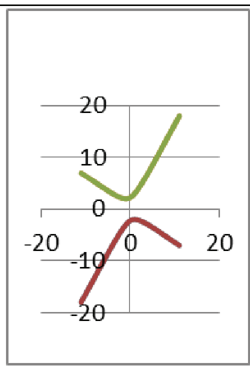
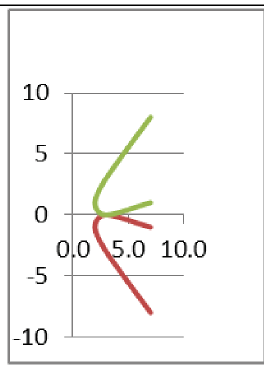
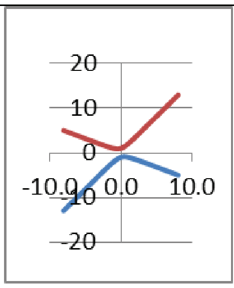
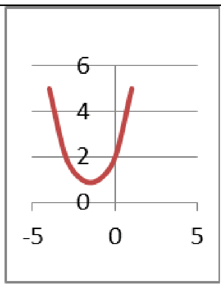
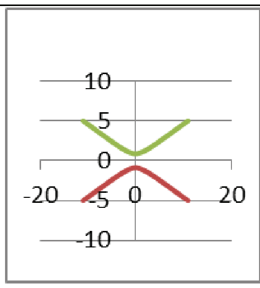
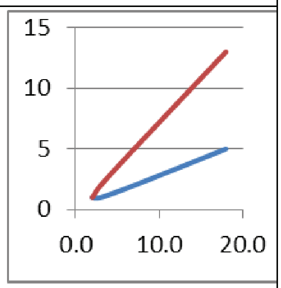
Рассматривая структуру взаимосвязи гиперболических функций Фибоначчи и функций Люка (11) – (14) на плоскости, получаем, что, если оси координат соответствуют одной из пар функций, то они представляют собой уравнение взаимосвязей, выражение которого представлено на пересечении их строк и столбцов. Предложенный подход к определению взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка для заданного значения аргумента t позволяет моделировать взаимоконтроль как непрерывных, так и дискретных сигналов, воспроизводящих определенные процессы в соответствующих системах координат, определяемых из таблицы 1.

Таблица 1 – Определение взаимосвязей функций Фибоначчии функций Люка между собой

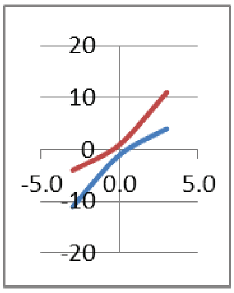
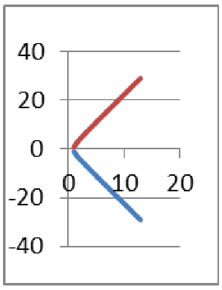
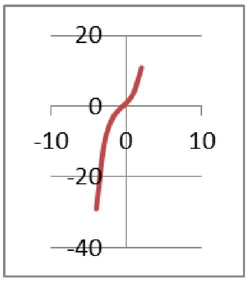
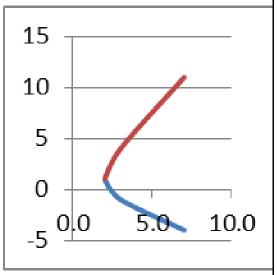
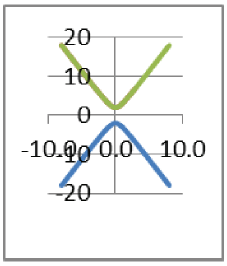
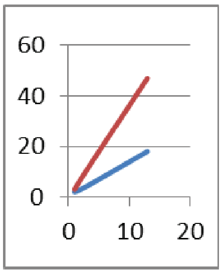
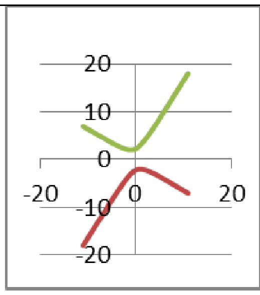
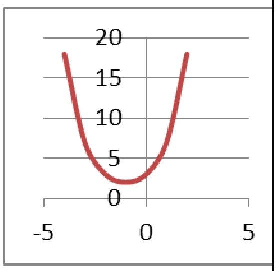
	x=sft	u=cft	v=slt	z=clt
x=sft	1	$\frac{-u\pm\sqrt{5u^2-4}}{2}$	$\frac{5v\pm\sqrt{5v^2+20}}{10}$	$\pm\frac{\sqrt{z^2-4}}{\sqrt{5}}$
u=cft	$\frac{x\pm\sqrt{5x^2+4}}{2}$	1	$\pm\frac{\sqrt{v^2+4}}{\sqrt{5}}$	$\frac{5z\pm\sqrt{5z^2-20}}{10}$
v=slt	$\frac{5x\pm\sqrt{5x^2+4}}{2}$	$\pm\sqrt{5u^2-4}$	1	$\frac{z\pm\sqrt{5z^2-20}}{2}$
z=clt	$\pm\sqrt{5x^2+4}$	$\frac{5u\pm\sqrt{5u^2-4}}{2}$	$\frac{-v\pm\sqrt{5v^2+20}}{2}$	1

Эти системы реализуют параметрический подход к определению геометрических мест точек взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка (табл. 2), а для их целочисленных аргументов соответствующие пары последовательностей чисел Фибоначчи (1^{I}), (1^{II}) и чисел Люка (2^{I}) и (2^{II}). Из таблицы 2 также видно как происходит трансформация графика гиперболы на две пары плоскостей и первой четверти плоскости.

Таблица 2 – Графики геометрических мест взаимосвязей функций Фибоначчи и функций Люка.

	x=sft	u=cft	v=slt	z=clt
x=sft				
u=cft				

Продовження табл. 2

v=slt				
z=clt				

Надеемся, эти результаты будут интересны лицам, которые изучают аналитическую геометрию при анализе систем координат, задаваемых в параметрической форме. И, наконец, переходя к обозначениям функций Фибоначчи и функций Люка в их изначальном представлении, получим, что:

$$\mathrm{cf}^2 t - \mathrm{sf}^2 t - \mathrm{sf}t \cdot \mathrm{cf}t = 1,\ \mathrm{cl}^2 t - \mathrm{sl}^2 t - \mathrm{sl}t \cdot \mathrm{cl}t = 5,$$

$$\mathrm{cl}^2 t - 5\mathrm{sf}^2 t = 4,\ 5\mathrm{cf}^2 t - \mathrm{sl}^2 t = 4,$$

$$\mathrm{sl}^2 t + 5\mathrm{cf}^2 t - 5\mathrm{sf}t \cdot \mathrm{cf}t = 1,\ 5\mathrm{cl}t \cdot \mathrm{cf}t - 5\mathrm{cf}^2 t - \mathrm{cl}^2 t = 1,$$

которые дают возможность моделировать контроль как цифровых, так и аналоговых сигналов приемо-передающих устройств.

В случае же непрерывных сигналов, моделируемых с помощью соотношений (11) – (14), появляется возможность их взаимоконтроля, что позволит обеспечить высокую надежность приемо-передающих устройств.

Литература

1. Азаров О.Д. Основи теорії аналого-цифрового перетворення на основі надлишкових позиційних систем числення. Монографія. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2004. — 260 с.

2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978, 144 с.

3. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи / Докл. НАН Украины. — 1993, Вып. 7. — С. 9–14.

4. Ильин В.А., Поздняк З.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1969, 232 с.

Стаття надійшла до редакції 16.02.2011.