КОМП’ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА КОМПОНЕНТИ

УДК 681.325.5

О. Д. Азаров[1], О. І. Черняк[1], О. Г. Муращенко[1]

МЕТОДИ ПЕРЕНЕСЕННЯ І ЗАПОЗИЧЕННЯ У ШВИДКОДІЮЧИХ ФІБОНАЧЧІЄВИХ ЛІЧИЛЬНИКАХ

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація. У даній статті описано підхід до організації перенесення при лічбі у модифікованій фібоначчієвій системі числення. Даний підхід полягає у тому, що на кожному такті лічби наряду з додаванням одиниці у молодший розряд в залежності від напрямку лічби виконується один із видів фібоначчієвого перетворення (F-перетворення) коду лічильника. Використання FL- та FR-перетворень дозволяє виконувати перенесення і запозичення ще до того, як виникне переповнення у молодших чи загублення значення у старших розрядах. Це дозволяє уникати ситуацій, при яких за один такт перенесення або запозичення розповсюджуються далі ніж через три розряди. У статті описано модифіковану фібоначчієву систему числення, наведено аналітичні вирази для опису базису і алфавіту та показано, як представляються у ній числа. Наведено аналітичні вирази, що описують FL- та FR-перетворення. Сформульовано твердження про те, що при виконанні всіх можливих фібоначчієвих перетворень на кожному такті лічби отриманий код буде мати не більше двох сусідніх одиниць. Це дозволяє організувати швидку лічбу за рахунок малого часу розповсюдження перенесення і запозичення.
Ключові слова: лічба, модифікована фібоначчієва система числення, фібоначчієве перетворення, перенесення, запозичення.
Аннотация. В данной статье описан подход к организации переноса при счете в модифицированной Фибоначчиева системе счисления. Данный подход заключается в том, что на каждом такте счета наряду с добавлением единицы в младший разряд в зависимости от направления счета выполняется один из видов Фибоначчиевого преобразования (F-преобразование) кода счетчика. Использование FL- и FR преобразований позволяет выполнять перенос и заимствование еще до того, как возникнет переполнение в младших или утеря значения в старших разрядах. Это позволяет избегать ситуаций, при которых за один такт перенос или заимствование распространяются дальше чем через три разряда. В статье описано модифицированную Фибоначчиева систему счисления, приведены аналитические выражения для описания базиса и алфавита и показано, как представляются в ней числа. Приведены аналитические выражения, описывающие FL- и FR преобразования. Сформулировано утверждение о том, что при выполнении всех возможных Фибоначчиевых преобразований на каждом такте счета полученный код будет иметь не более двух соседних единиц. Это позволяет организовать быстрый счет благодаря малому времени распространения переноса и заимствования.
Ключевые слова: счет, модифицированная фибоначчиевая система счисления, фибоначчиевое преобразование, перенос, заимствование.
Abstract. This article describes the approach to the organization of carry-over with the account in the modified Fibonacci numerical system. This approach is based on the fact that on each count cycle, along with the addition of a unit to the low order depending on the direction of the account, one of the Fibonacci transformation types (F-transformation) of the counter code is executed. Using FL- and FR-transformation allows you to carry out the carrying and borrowing even before there is an overflow in the lower or loss in the higher order bits. This makes it possible to avoid situations in which the carrying or borrowing is extended more than three orders in a single clock cycle. The article describes the modified Fibonacci numerical system, provides analytical expressions for describing the basis and the alphabet, and shows how the numbers are represented in it. Analytical expressions describing FL and FR transformations are given. An assertion is made that when all possible Fibonacci transformations are performed on each circle of count, the resulting code will have no more than two neighboring units. This allows you to organize a quick count due to the short transfer and borrowing time.
Keywords: counting, Fibonacci numerical system, Fibonacci transform, carrying, borrowing.
DOI: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2018-42-2-55-63.

Вступ

Для широкого впровадження цифрових засобів, які у своїй структурі містять лічильники, потрібно щоб ці лічильники не лише мали високу швидкодію, але також забезпечували й інші параметри в залежності від характеру вирішуваних задач. Останнім часом при побудові засобів автоматизації і управління зростає популярність використання систем прямого цифрового синтезу (direct digital synthesis – DDS) аналогових сигналів за допомогою цифро-аналогових перетворювачів (ЦАП). Зокрема, широко використовуються DDS-системи для формування сигналів, що складаються з послідовності лінійно зростаючих, горизонтальних, а також лінійно спадаючих відрізків. У таких системах для формування цифрових кодів на вході ЦАП використовують швидкодіючі лічильники. Існують різні схемотехнічні способи підвищення швидкодії лічильників на основі структурних рішень. Проте, використання у DDS-системах традиційної двійкової системи числення породжує проблему "глітчів" – завад, які виникають на виході ЦАП під час перемикання розрядів. Причому, амплітуда цих "глітчів" напряму залежить від кількості розрядів, які перемикаються протягом одного такту. Відомо, що використання фібоначчієвих ЦАП дозволяє зменшити вплив таких завад [1]. Одним з важливих елементів DDS-системи з фібоначчієвим ЦАП є швидкодіючий лічильник, який повинен мати невелику кількість розрядів, що перемикаються протягом одного такту. Розробка такого лічильника є актуальною задачею.

Головним завданням на шляху вирішення даної задачі є зменшення довжини розповсюдження перенесення, що виникає на кожному такті лічби і обмежує її швидкість. Цього можна досягти за рахунок використання таких надлишкових систем числення, які мають адитивне співвідношення між вагами розрядів [2]. До цих систем числення належать також фібоначчієва система числення та система числення золотої пропорції. У даних системах числення при додаванні можна виконувати перенесення раніше, ніж виникне переповнення [3-10].

У статті запропоновано принципи організації перенесення і запозичення при лічбі у модифікованій фібоначчієвій системі числення (МФ-системі числення) з метою зменшення довжини їх розповсюдження, що дасть можливість як підвищити швидкість лічби, так і зменшити завади на виході ЦАП.

Фібоначчієві перетворення в МФ-системі числення

Модифікована фібоначчієва система числення може бути описана за допомогою базису Ф і алфавіту D:

$$\left\{\begin{matrix} \Phi:\{\varphi_0=1,\varphi_1=2,\underset{i>1}{\forall}(\varphi_i=\varphi_{i-1}+\varphi_{i-2})\} \\ D:\{0,1\} \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

де Ф – множина ваг розрядів φ_i, така, що $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 2$, а для кожного $i > 1$ $\varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}$;

D – множина з двох цифр 0 і 1.

В МФ-системі числення будь-яке ціле число X може бути представлене n-розрядним двійковим кодом $x_{n-1}x_{n-2}...x_{i}...x_1x_0$, де $x_i \in D$ відповідно до виразу (1), а n визначається за співвідношенням $\varphi_{n-1} \le X \le \varphi_{n-2}$. Позначемо n-розрядний двійковий код $x_{n-1}x_{n-2}...x_{i}...x_1x_0$ як X_0^n, а його частину довжиною в k розрядів, починаючи з i-го як X_i^k. В МФ-системі числення значення коду X_0^n визначається виразом:

$$X_0^n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot w_i \,. \qquad (2)$$

В МФ-системі числення між вагами розрядів існує фібоначчієве співвідношення (F-співвідношення):

$$F: \underset{i>1}{\forall}(\varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2})\,. \qquad (3)$$

Для i-го розряду існує i-те F-співвідношення:

$$F_i : \varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\,. \qquad (4)$$

Фібоначчієве співвідношення дозволяє виконувати фібоначчієві перетворення кодів (F-перетворення). F-перетворення бувають двох типів: з перенесенням у старші розряди (FL-перетворення) і з перенесенням у молодші розряди розряди (FR-перетворення).

FL-перетворення коду X_0^n є умовною арифметичною операцією, що виконується над всіма його розрядами, крім нульового і першого. Дане перетворення полягає у тому, що для будь-якого i>1 у випадку, якщо $x_i=0$, $x_{i-1}=1$, $x_{i-2}=1$, виконується додавання одиниці в розряд x_i і віднімання одиниць у розрядах x_{i-1} та x_{i-2}:

$$FL(X_0^n) = \underset{x_i=0 \wedge x_{i-1}=1 \wedge x_{i-2}=1}{\forall} (X_0^n + \varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i-2})\,.$$

Відповідно до (4) i-те FL-перетворення коду записується виразом

$$FL_i(X_0^n) = \left\{\begin{matrix} X_0^n + \varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i-2} \text{ при } x_i = 0 \wedge x_{i-1} = 1 \wedge x_{i-2} = 1; \\ X_0^n \text{ при } x_i \ne 0 \vee x_{i-1} \ne 1 \vee x_{i-2} \ne 1; \end{matrix}\right\}.$$

FR-перетворення коду X_0^n також є умовною арифметичною операцією, що виконується над всіма його розрядами, крім нульового і першого. Дане перетворення полягає у тому, що для будь-якого i>1 у випадку, якщо $x_i=1$, $x_{i-1}=0$, $x_{i-2}=0$, виконується віднімання одиниці в розряді x_i і додавання одиниць у розряди x_{i-1} та x_{i-2}:

$$FR(X_0^n) = \underset{x_i=0 \wedge x_{i-1}=1 \wedge x_{i-2}=1}{\forall} (X_0^n - \varphi_i + \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}).$$

Відповідно, і-те FR-перетворення коду виконується над і-м, (і-1)-м та (і-2)-м розрядами цього коду і записується виразом

$$FR_i(X_0^n) = \begin{cases} X_0^n - \varphi_i + \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2} \text{ при } x_i = 1 \wedge x_{i-1} = 0 \wedge x_{i-2} = 0; \\ X_0^n \text{ при } x_i \neq 1 \vee x_{i-1} \neq 0 \vee x_{i-2} \neq 0; \end{cases}.$$

FL- і FR-перетворення подібні до відомих операцій згортки і розгортки, що полягають у заміні одного коду на інший. Але, на відміну від операцій згортки і розгортки, що є логічними операціями, FL- і FR-перетворення є умовними арифметичними операціями додавання і віднімання, що виконуються над частинами коду. При цьому значення всього коду не змінюється, тому дані операції можна використовувати в якості перенесення і запозичення у процесі прямої або оберненої лічби. В МФ-системі числення перенесення і запозичення можуть виконуватись раніше, ніж виникне переповнення чи загублення значення у розрядах. Це дозволяє відокремити перенесення і запозичення від додавання чи віднімання одиниці при лічбі, завдяки чому вони мають обмежену довжину розповсюдження. Обмеженість довжини перенесення і запозичення покладено в основу побудови швидкодіючих лічильників в МФ-системі числення.

Перенесення при прямій лічбі в МФ-системі числення

Під час прямої лічби у даній системі числення на кожному такті над кодом лічильника, отриманим на попередньому такті, виконується FL-перетворення і до нього додається одиниця:

$$X_0^n(i) = FL(X_0^n(i-1)) + 1. \tag{5}$$

У випадку, якщо $(FL(X_0^n(i-1)))_0^3 = 011$, таке додавання призведе до перенесення з нульового у перший розряд, наприклад, 1001+1=1010. Якщо ж на попередньому такті $(X_0^n(i-1))_0^3 = 011$, то відповідно до (4)

$$(FL(X_0^n(i-1)))_0^3 = (FL_2(X_0^n(i-1)))_0^3 = 100.$$

Тому в цьому випадку після FL-перетворення попереднього коду додавання одиниці у його молодший розряд не призведе до перенесення у другий розряд, наприклад:

$$X_0^4(i-1) = 1011,$$
$$FL(1011)=FL_2(1011)=1100,$$
$$1100+1=1101.$$

Як видно з даного прикладу, після виконання і-го FL-перетворення розряди x_{i-1} та x_{i-2} мають нульові значення. Це дозволяє виконувати перенесення у дані розряди без його подальшого розповсюдження у старші розряди, тобто:

$$FL_i(X_0^n(i-1)) + 1 = (X_0^n(i-1))_{i+1}^{n-i-1} + X_0^{i+1}(i).$$

Збільшення будь-якого розряду коду лічильника, починаючи з другого, відбувається лише за рахунок FL-перетворення, тобто, перенесення з молодших розрядів. Очевидно, що при цьому вага таких перенесень завжди більша ваги молодшого розряду, на яку збільшується значення у лічильнику на кожному такті. Тому даний метод лічби не призведе до переповнення у розрядах коду лічильника. Більш того, кількість сусідніх одиниць коду, через які можливе перенесення на кожному такті, становить не більше двох. Це обґрунтовується наведеним далі твердженням.

Твердження 1. Якщо на кожному такті роботи фібоначчієвого лічильника додається одиниця до молодшого розряду та виконуються всі можливі FL-перетворення, то в його коді не може бути більше двох сусідніх одиниць, через які відбувається перенесення. Доведення даного твердження наведено в [11].

З твердження 1 слідує, що виконання всіх можливих FL-перетворень на кожному такті прямої лічби приводить до того, що перенесення у старші розряди не буде розповсюджуватись далі ніж через два розряди. Тому врахування його як паралельне перенесення потребує незначних апаратних витрат. Це дозволяє будувати в МФ-системі числення швидкодіючі лічильники з помірними апаратними витратами. Слід зазначити, що справедливість твердження 1 була доведена, виходячи з двох припущень: по-перше, що початковий код, з якого починається лічба, не містить більше двох сусідніх одиниць; по-друге, що при досягненні коду, у якому $(X_0^{n-1})_{n-2}^2 = 11$ (тобто, два старших розряди дорівнюють одиниці), подальша пряма лічба припиняється або лічильник встановлюється у початковий стан. У випадку, якщо виконується перше припущення, але не виконується друге, тобто, якщо при досягненні коду $110x_{n-4}...x_0$ лічба продовжується, то пряма лічба буде виконуватись коректно, але при цьому кількість сусідніх одиниць у коді лічильника з часом стане більшою двох. Це відбувається через те, що при досягненні коду $110x_{n-4}...x_0$ блокується виконання FL_{n-2}-перетворення, оскільки у всіх наступних тактах прямої лічби $x_{n-2} \neq 0$. На деякому наступному такті лічби це призведе до появи одиничного значення у розряді x_{n-3}, що, у свою чергу, заблокує виконання FL_{n-3}-перетворення, і так далі. Отже, продовження прямої лічби після досягнення фібоначчієвим лічильником коду $110x_{n-4}...x_0$ буде призводити до поступового збільшення кількості сусідніх одиниць у коді, починаючи зі старших розрядів. Тому на деякому k-у такті прямої лічби всі розряди коду лічильника матимуть одиничне значення:

$$\underset{0 \le i \le n-1}{\forall} (x_i(k) = 1) .$$

Відповідно до (3.2) і (3.1) значення даного коду $X(k)=\varphi_{n+1}-1$, де φ_{n+1} – (n+2)-е число Фібоначчі. Дане число визначає максимальну кількість одиниць, яку можна коректно підрахувати за допомогою n-розрядного лічильника. Тобто, $k=\varphi_{n+1}-1$. Подальша пряма лічба у даному лічильнику призведе до спотворення інформації у його коді. Тому в n-розрядному лічильнику після $\varphi_{n+1}-1$ тактів пряму лічбу потрібно припинити, або примусово скинути такий лічильник у початковий стан.

У випадку, якщо не виконується перше припущення, на якому базується доведення справедливості твердження 1, то це на будь-якому такті може призвести до неправильної роботи лічильника через виникнення у молодших розрядах переповнення, спричиненого невиконанням умови FL-перетворення у цих розрядах. Наприклад, встановлення лічильника у початковий код $X_0^{n-1}(0) = x_{n-1}...x_3 111$ вже на першому такті прямої лічби призведе до переповнення лічильника і спотворення результату через неможливість виконання FL_2-перетворення. Дана особливість прямої лічби в МФ-системі числення накладає обмеження на форму початкового коду у лічильнику, яке стосується кількості сусідніх одиниць у коді. Очевидно, що ці обмеження у першу чергу стосуються молодших розрядів, оскільки перенесення від додавання одиниці у нульовий розряд спочатку досягне їх. Тому визначимо обмеження, що накладаються на групу сусідніх одиниць у наймолодших розрядах.

Нехай у початковому коді лічильника молодші (k+1) розрядів дорівнюють нулю, d розрядів, починаючи з (k+1)-го, дорівнюють одиниці, а (k+d+1)-й розряд також дорівнює нулю, як це зображено на рисунку 1.

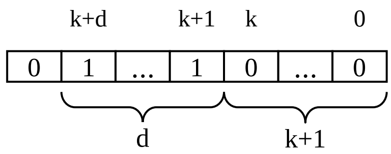

Рисунок 1 – Розташування сусідніх одиниць у d наймолодших розрядах лічильника

Тобто:

$$(x_{k+d+1} = 0) \wedge \underset{k<i \le k+d}{\forall} (x_i = 1) \wedge \underset{0 \le i \le k}{\forall} (x_i = 0) .$$

Визначимо кількість тактів, необхідну для того, щоб перенесення, яке виникає в режимі прямої лічби за виразом (5), розповсюдилось у k-й розряд. Очевидно, що дане перенесення не може виникнути раніше, ніж після φ_k тактів. У дійсності, воно виникає пізніше на деяку величину Δ_k. Отже, у режимі прямої лічби, організованої за виразом (3.5), перенесення у деякий k-й розряд коду надходить через $(\varphi_k+\Delta_k)$ тактів.

Знайдемо значення Δ_k. Особливістю МФ-системи числення є те, що для будь-якого парного k значення (φ_k-1) обчислюється за виразом:

$$\underset{k_{mod2}=0}{\forall}(\varphi_k - 1 = \sum_{i=1}^{k/2}\varphi_{2i}),$$

а для будь-якого непарного k це значення обчислюється за виразом:

$$\underset{k_{mod2}=1}{\forall}(\varphi_k - 1 = \sum_{i=0}^{(k+1)/2}\varphi_{2i}).$$

Тому такі значення представляються кодами, що у молодших розрядах мають (k+k_{mod2})/2 одиниць, розділених між собою нулями, наприклад:

$$\varphi_7\text{-}1=33_{(10)}=01010101_{(МФ)},$$
$$\varphi_{10}\text{-}1=143_{(10)}=01010101010_{(МФ)}.$$

Слід також вказати, що дана форма є єдиною для представлення кодів таких значень в МФ-системі числення. Внаслідок цього значення φ_k, що у режимі прямої лічби утворюється додаванням одиниці молодшого розряду до коду (φ_k-1), обчислюється за виразом

$$\underset{k_{mod2}=0}{\forall}(\varphi_k = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{k/2}\varphi_{2i}),$$
$$\underset{k_{mod2}=1}{\forall}(\varphi_k = \varphi_1 + \sum_{i=2}^{(k-1)/2}\varphi_{2i}),$$

Отже, після φ_k тактів прямої лічби, починаючи з нуля, код у лічильнику буде мати у молодших розрядах (k-k_{mod2})/2 одиниць, розділених між собою нулями, після яких слідує ще одна одиниця, наприклад:

$$\varphi_7=34_{(10)}=01010110_{(МФ)},$$
$$\varphi_{10}=144_{(10)}=01010101011_{(МФ)}.$$

На наступних (k-k_{mod2})/2 тактах прямої лічби буде виконуватись розповсюдження перенесення у k-й розряд за рахунок виконання FL- перетворення, як це зображено на рисунку 2 для прикладу k=10. Тобто, Δ_k = (k-k_{mod2})/2.

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	144-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	145-й такт
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	146-й такт
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	147-й такт
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	148-й такт
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	149-й такт

Рисунок 2 – Перенесення в 10-й розряд у режимі прямої лічби

Як видно з рисунку, починаючи з десятого такту, на кожному наступному такті за допомогою FL-перетворення відбувається розповсюдження перенесення з двох сусідніх розрядів. Тобто, розповсюдження перенесення через десять розрядів виконається за п'ять тактів. Таке перенесення повністю обнулить молодші десять розрядів коду, отриманого на десятому такті. Проте, протягом даного перенесення паралельно буде також відбуватись збільшення коду у молодших розрядах в результаті продовження прямої лічби. Це не вплине на розповсюдження перенесення, оскільки таке збільшення відбувається повільніше. Дійсно, на (k+i)-у такті в результаті FL-перетворення коду, отриманого на k-у такті, перенесення відбувається у 2i-й розряд, а перенесення, отримане за рахунок подальшої лічби розповсюджується в розряд з найменшою вагою, що більша чи дорівнює φ_i. Отже, у режимі прямої лічби, починаючи з нуля, перше перенесення в k-й розряд виникне через $N1_k$ тактів, де значення $N1_k$ обчислюється за формулою

$$N1_k = \varphi_k + (k - k_{mod2}) / 2.$$

Наступне перенесення у цей розряд виникне через $N2_k$ тактів, де $N2_k$ обчислюється за співвідношенням

$$N2_k = 2\varphi_k + (k - k_{mod2}) / 2.$$

Очевидно, що кількість сусідніх одиниць d у розрядах, починаючи з (k+1)-го повинна бути такою, щоб за цю кількість тактів в них виконались всі перенесення. Враховуючи, що при кожному виконанні FL-перетворення перенесення розповсюджується через два розряди, значення d повинно відповідати співвідношенню $d \le 2N2_k-1$, тобто

$$d \le 4\varphi_k + k - k_{mod2} -1. \quad (6)$$

На рисунку 3 зображено приклад максимальної кількості d сусідніх одиниць у молодших розрядах початкового коду при k = 1.

0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0-й такт
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1-й такт
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	2-й такт
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	3-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	4-й такт

Рисунок 3 – Максимальна кількість сусідніх одиниць у молодших розрядах початкового коду при k = 1

У таблиці 1 для режиму прямої лічби подано значення максимальної кількості d сусідніх одиниць початкового коду лічильника, починаючи з k-го розряду при умові, що молодші k розрядів дорівнюють нулю.

Таблиця 1 – Максимальна кількість d сусідніх одиниць початкового коду, починаючи з k-го розряду при $(X(0)_0^{n-1})_0^{k-1} = 0$

k	φ_k	d
0	1	3
1	2	6
2	3	9
3	5	21
4	8	35
5	13	55
6	21	89
7	34	141

Значення d, наведені у таблиці 3.1, вказують на максимально допустиму кількість сусідніх одиниць, від k-го до (k+d-1)-го розрядів початкового коду лічильника при умові, що значення молодших k розрядів дорівнюють нулю. Якщо ж у k молодших розрядах знаходиться якесь початкове значення N(0), то враховуючи (6), d визначається за виразом:

$$d \le 4\varphi_k + k - k_{mod2} -1- 2(N(0) + N(0)_{mod2}). \quad (7)$$

Це дозволяє у режимі прямої лічби перевіряти на допустимість початковий код лічильника, починаючи з молодших розрядів. Наприклад, якщо встановлено початковий код 01111111110110, то відповідно до виразу (7) цей код є допустимим, оскільки для k = 0 виконується $d = 2 \le 3$, а для k = 3 виконується $\varphi_3 = 5$, $N(0) = 5$, $d = 9 \le 4 \cdot 5 + 3 – 1 – 1 – 2 \cdot (5 + 1)$. На рисунку 4 зображено процес прямої лічби, починаючи з даного коду.

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0-й такт
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1-й такт
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	2-й такт
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	3-й такт
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	4-й такт
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	5-й такт
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	6-й такт

Рисунок 4 – Розповсюдження перенесення у режимі прямої лічби, починаючи з коду 01111111110110

Запозичення при оберненій лічбі в МФ-системі числення

Робота у режимі оберненої лічби потребує виконання віднімання одиниці у наймолодшому розряді і запозичення зі старших розрядів. Під час оберненої лічби у МФ-системі числення на кожному такті над кодом лічильника, отриманим на попередньому такті, виконується FR-перетворення і від нього віднімається одиниця наймолодшого розряду:

$$X_0^{n-1}(i) = FR(X_0^{n-1}(i-1)) - 1. \qquad (8)$$

У випадку, якщо $(FR(X_0^{n-1}(i-1)))_0^2 = 100$, таке віднімання призведе до запозичення з другого у нульовий розряд, наприклад, 1100-1=1010. Проте, якщо на попередньому такті $(X_0^n(i-1))_0^2 = 100$, то відповідно до (3)

$$(FR(X_0^n(i-1)))_0^3 = (FR_2(X_0^n(i-1)))_0^2 = 011.$$

Тому в цьому випадку після виконання FR-перетворення над кодом, отриманим на попередньому такті, віднімання одиниці від значення наймолодшого розряду не призведе до запозичення з другого розряду, наприклад,

$$X_0^3(i-1) = 1100\ ,$$
$$FL(1100)=FL_2(1100)=1011,$$
$$1011-1=1010.$$

Як видно з наведеного прикладу, після виконання k-го FR-перетворення над кодом, отриманим на попередньому такті, його розряди x_{k-1} та x_{k-2} мають одиничні значення. Це дозволяє виконувати запозичення з зазначених розрядів без його подальшого розповсюдження у старші розряди коду, тобто, виконується рівняння

$$FR_k(X_0^{n-1}(i-1)) - 1 = (X_0^{n-1}(i-1))_{k+1}^{n-k-2} + X_0^k(i).$$

При оберненій лічбі зменшення будь-якого розряду коду лічильника, починаючи з другого, відбувається лише за рахунок виконання FR-перетворення, тобто, запозичення зі старших розрядів. Очевидно, що при цьому вага таких запозичень завжди більша ваги наймолодшого розряду, на яку зменшується значення у лічильнику на кожному такті. Тому при наявності одиниць у старших розрядах коду даний метод лічби не призведе до переходу у від’ємне значення у молодших розрядах. Проте, даний висновок можна зробити лише відносно тих форм початкових кодів лічильника, що мають у своїх розрядах достатню кількість одиниць, наприклад, 0111111111. Існують такі форми початкових кодів, для яких неможливе коректне виконання оберненої лічби, наприклад, 10000000. Очевидно, що у цьому випадку вже на першому такті оберненої лічби відповідно до (8) молодший розряд перейде у від’ємне значення. Тому, як і для прямої лічби, для даного випадку постає задача знаходження допустимих форм початкових кодів лічильника. Для цього спочатку визначимо обмеження, що накладаються на кількість сусідніх нулів у такому коді.

Нехай у початковому коді лічильника X у молодших (k+1) розрядах міститься деякий код $(X_0^{n-1})_0^k$, d розрядів, починаючи з (k+1)-го, дорівнюють нулю, а (k+d+1)-й розряд також дорівнює одиниці, як це зображено на рисунку 5.

	k+d		k+1	k		0
1	0	...	0	1	...	x_0
		d			k+1	

Рисунок 5 – Розташування сусідніх нулів у d розрядах лічильника

Тобто:

$$X = \varphi_{k+d+1} + \sum_{i=0}^{k} x_i \cdot \varphi_i \, .$$

Визначимо d. Очевидно, що для коректної оберненої лічби потрібно, щоб за X-φ_{k+d+1} тактів запозичення з (k+d+1)-го розряду досягло трьох наймолодших розрядів коду. Оскільки запозичення в МФ-системі числення реалізується за допомогою FR-перетворення, то на кожному окремому такті лічби воно розповсюджується на два розряди, як це зображено на рисунку 6.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0-й такт
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1-й такт
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2-й такт
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	3-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	4-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	5-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	6-й такт
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	7-й такт

Рисунок 6 – Розповсюдження перенесення у режимі оберненої лічби, починаючи з коду 10000000001001

Як видно з рисунку, для даного прикладу початкового коду на шостому такті запозичення з 13-го розряду досягає наймолодшої тріади розрядів. А в молодших розрядах початкового коду з 0-го по 3-й записано число 6. Тому за 6 тактів оберненої лічби воно стане дорівнювати нулю. Проте, завдяки запозиченню подальша лічба буде виконуватись коректно, що показано на рисунку у 7-у такті.

Отже, для коректного виконання оберненої лічби потрібно, щоб у початковому коді кількість сусідніх нулів d з (k+1)-го (k+d)-й розряди відповідала нерівності

$$d \le \begin{cases} -k + 2 \cdot \sum_{i=0}^{k} (x_i \cdot \varphi_i) \text{ при } (k+d)_{\text{mod}2} = 0, \\ 1 - k + 2 \cdot \sum_{i=0}^{k} (x_i \cdot \varphi_i) \text{ при } (k+d)_{\text{mod}2} = 1. \end{cases}$$

Так само, як і в режимі прямої лічби, вимоги до початкового коду у режимі оберненої лічби можуть бути легко виконані за допомого відповідного F-перетворення.

Проведені теоретичні дослідження перенесення у режимах прямої та оберненої лічби дозволяють розробити структурну організацію швидкодіючих лічильників у МФ-системі числення.

Висновки

1. Досліджено властивості модифікованої фібоначчієвої системи числення і описано фібоначчієві перетворення кодів, що можуть використовуватись при лічбі як перенесення і запозичення з малою довжиною розповсюдження.
2. Визначено обмеження, що накладаються на форми початкових кодів у режимах прямої та оберненої лічби.

3. Обґрунтовано, що при дотриманні обмежень на форми початкових кодів використання фібоначчієвих перетворень для виконання перенесення і запозичення дозволяє будувати швидкодіючі лічильники, в яких на кожному такті перенесення розповсюджується не далі, ніж на три розряди.
4. Використання таких лічильників у DDS-системах дозволить зменшити вплив "глітчів".

Список літератури

[1] Olexiy D. Azarov; Olexander G. Murashchenko, Olexander I. Chernyak, Andrzej Smolarz and Gulzhan Kashaganova "Method of glitch reduction in DAC with weight redundancy ", *Proc. SPIE* 9816, Optical Fibers and Their Applications 2015, 98161T (December 18, 2015); doi:10.1117/12.2229045; http://dx.doi.org/10.1117/12.2229045.

[2] О. Д. Азаров, О. І. Черняк, "Метод побудови швидкодіючих фібоначчієвих лічильників" *Проблеми інформатизації та управління* №2(46), с. 5-8, 2014.

[3] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк, «Визначення довжини перенесення при додаванні в системах числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів» *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація*, Випуск 74, с. 401–407, 2004.

[4] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк, «Структурна організація побітового множення і ділення кодів золотої пропорції» *Проблеми інформатизації та управління*, Вип. 3(21), с. 5–13, 2007.

[5] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк, «Розрядність пристроїв порозрядного додавання в АМ-системах числення,» *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*, [Електронний ресурс] № 4, 2010. Режим доступу : http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/233.

[6] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк, «Структурна організація побітового додавання і віднімання кодів золотої 1-пропорції з урахуванням знаків,» *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*, № 3(22), с. 13–16, 2011.

[7] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк, «Аналіз витрат обладнання пристроїв побітової арифметики у системі числення золотої 1-пропорції,» *Проблеми інформатизації та управління*, Київ: НАУ, № 2(38), с. 5-9, 2012.

[8] О. Д. Азаров, О. І. Черняк, *Повнофункціональна побітова потокова арифметика зі зменшеними витратами обладнання*, Вінниця Україна: ВНТУ, 2013, 200с.

[9] О. Д. Азаров, та О. І. Черняк «Обмеження адитивних співвідношень при порозрядній потоковій обробці в АМ-системах числення,» *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*. № 3(31), с. 67-71, 2014.

[10] О. Д. Азаров, О. І. Черняк, та О. Г. Муращенко, «Порозрядне додавання в АМ-системах числення на основі адитивних перетворень,» *Проблеми інформатизації та управління*. № 1(45), с. 14-21, 2014.

[11] О. Д. Азаров, О. І. Черняк, та О. Г. Муращенко, «Інформаційні аспекти лічби у модифікованій фібоначчієвій системі числення,» *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*. № 1(38). - с. 48-52, 2017.

Стаття надійшла: 28.08.2018.

Відомості про авторів

Азаров Олексій Дмитрович, д. т. н., професор, декан факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії Вінницького національного технічного університету, заслужений працівник освіти України.

Черняк Олександр Іванович, к.т.н., доцент кафедри обчислювальної техніки Вінницького національного технічного університету.

Муращенко Олександр Геннадійович, інженер ТОВ "Він-Інтерактив"; адреса: 21021 м. Вінниця.

O. D. Azarov[1], O. I. Chernyak[1], O. G. Muraschenko[1]

THE TRANSFER AND BORROWING METHODS IN FAST FIBONACCI COUNTERS

[1]Vinnitsa National Technical University

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Найновіші правила оформлення і подання статей знаходяться на сайті журналу
http://itce.vntu.edu.ua/