

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 519.6

Я. В. Іванчук, А. А. Яровий, К. О. Коваль

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Анотація. У даній статті наведений чисельний метод моделювання, який застосовується при дослідженні динаміки суцільних в'язких слабостиснених рідин на основі системи рівнянь нерозривності і Нав'є-Стокса. У запропонованому методі використовується комплексний підхід використання чисельного розв'язку рівняння нерозривності методом кінцевих об'ємів, а для розв'язку рівняння Нав'є-Стокса метод розщеплення по фізичним факторам. У статті показано, що метод кінцевих об'ємів, який застосовувався для опису течії як стисненої, так і нестисненої рідин володіє такими важливими перевагами, як наявність хороших консервативних властивостей і допущення дискретизації складних обчислювальних областей в більш прості, чим це дозволяє ізопараметричне кінцево-елементне формулювання задачі або введення узагальнених координат. У метод розщеплення по фізичним факторам вводиться складова, яка враховує штучну стислість досліджуваної рідини, що дозволяє спочатку розрахувати проміжкове поле швидкостей, яке потім підправляється із врахуванням градієнти тиску. Різницева схема даного методу дозволяє розраховувати поле течії без використання значень вихору і тиску на твердій поверхні. У рамках запропонованого підходу не потрібно розраховувати значення вихору на твердій поверхні. Останнє може бути знайдене по обчисленому полю швидкостей із використанням якогонебудь із різницьких представлень виразу для вихору в граничних точках. Для підтвердження ефективності запропонованого методу, в CFD-програмі FlowVision були отримані розв'язки цілого ряду задач зовнішньої гідродинаміки, на прикладі оптикання циліндричної поверхні, які підтвердили стійкість отриманих результатів. Даний метод дозволяє проводити по єдиному алгоритму розрахунки оптикання плоских, осесиметричних і тривимірних тіл складної конфігурації потоком в'язкої слабостисненої рідини, а також внутрішніх течій в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

Ключові слова: рівняння Нав'є-Стокса, чисельне моделювання, алгоритм, тиск, швидкість, різницева схема.

Аннотация. В данной статье приведен численный метод моделирования, который применяется при исследовании динамики сплошных вязких слабосжатых жидкостей на основе системы уравнений неразрывности и Навье-Стокса. В предложенном методе используется комплексный подход использования численного решения уравнения неразрывности методом конечных объемов, а для решения уравнения Навье-Стокса метод расщепления по физическим факторам. В статье показано, что метод конечных объемов, который применялся для описания течения как сжатой, так и несжатой жидкостей обладает такими важными преимуществами, как наличие хороших консервативных свойств и допущения дискретизации сложных вычислительных областей в более простые, чем это позволяет изопараметрическая конечно-элементная формулировка задачи или введение обобщенных координат. В метод расщепления по физическим факторам вводится составляющая, которая учитывает искусственную сжимаемость исследуемой жидкости, что позволяет сначала рассчитать промежуточное поле скоростей, которое затем подправляется с учетом градиенты давления. Разностная схема данного метода позволяет рассчитывать поле течения без использования значений вихря и давления на твердой поверхности. В рамках предложенного подхода не нужно рассчитывать значение вихря на твердой поверхности. Последнее может быть найдено по вычисленному полю скоростей с использованием какого-либо из разностных представлений выражения для вихря в граничных точках. Для подтверждения эффективности предложенного метода, в CFD-программе FlowVision были получены решения целого ряда задач внешней гидродинамики, на примере оптиканья цилиндрической поверхности, которые подтвердили устойчивость полученных результатов. Данный метод позволяет проводить по единому алгоритму расчеты обтекания плоских, осесимметричных и трехмерных тел сложной конфигурации потоком вязкой слабосжатой жидкости, а также внутренних течений в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, численное моделирование, алгоритм, давление, скорость, разностная схема..

Abstract. This article presents a numerical simulation method that is used in the study of the dynamics of continuous viscous weakly compressed fluids based on the system of equations of continuity and Navier-Stokes. The proposed method uses a complex approach using the numerical solution of the continuity equation by the finite-volume method, and for solving the Navier-Stokes equation the splitting method by physical factors. The article shows that the finite volume method, which was used to describe the flow of both compressed and uncompressed liquids, has such important advantages as the presence of good conservative properties and assumptions of discretization of complex computational domains into simpler ones than isoparametric finite element formulation of the problem or the introduction of generalized coordinates. A component is introduced into the method of splitting according to physical factors, which takes into account the artificial compressibility of the test liquid, which allows you to first calculate the intermediate velocity field, which is then corrected taking into account the pressure gradients. The difference scheme of this method allows one to calculate the flow field without using the values of the vortex and pressure on a solid surface. In the framework of the proposed approach, it is not necessary to calculate the value of the vortex on a solid surface. The latter can be found from the calculated velocity field using any of the difference representations of the expression for the vortex at the boundary points. To confirm the effectiveness of the proposed method, in the FlowVision CFD program, solutions were obtained for a number of problems in external hydrodynamics, using the example of a cylindrical surface optics, which confirmed the stability of the results obtained. This method allows one to compute the flow of flat, axisymmetric, and three-dimensional bodies of a complex configuration with a flow of a viscous weakly compressed fluid, as well as internal flows in a wide range of Reynolds numbers using a single algorithm.

Key words: Navier-Stokes equations, numerical simulation, algorithm, pressure, speed, difference scheme.

DOI: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2019-44-1-37-45>.

Вступ

Сучасний етап розвитку нелінійної механіки характеризується широким і глибоким використанням самих тонких ефектів; вона все більше взаємодіє з іншими областями науки і техніки. Однією із характерних рис сучасних досліджень є математизація фізичного пізнання, інтенсивне застосування методів математичного моделювання в різних галузях науки і техніки. Поява сучасних потужних комп'ютерних

систем (КС) [1] значно підвищило інтерес до різних чисельних методів і алгоритмів, реалізація яких межує із проведенням чисельного експерименту, який відображає процес отримання результатів при чисельному моделюванні. Потреба у такому підході до розв'язку задач математичної фізики диктується все більш ускладнюючими запитами практики, а також зв'язана із спробою створення більш раціональних загальних теоретичних моделей для вивчення складних фізичних явищ.

Актуальність

Однією із сучасних актуальних наукових проблем в гідромеханіці є опис руху в'язкої слабостисненої рідини, яка описується рівняннями нерозривності і Нав'є-Стокса [2]. Сюди відносяться задачі руху рідини при ламінарному і турбулентному обтіканні тіл кінцевих розмірів; течії в зоні сліду і областях зриву потоку, в шарах змішування; в пограничних шарах у поверхні тіла тощо [3]. Поява сучасних потужних КС надало новий імпульс цим дослідженням, що дозволило отримати кількісні результати при розв'язку практично важливих задач про рух реальної рідини при помірних числах Рейнольдса. Нелінійність рівнянь Нав'є-Стокса і наявність малих параметрів при старших похідних в них створюють серйозні труднощі, як при аналітичному дослідженні так і при чисельному інтегруванні цих рівнянь за допомогою КС. Таким чином, проблема побудови чисельних алгоритмів для розв'язку системи рівнянь нерозривності і Нав'є-Стокса з високою точністю (особливо в багатомірному випадку) залишається на сьогодні актуальною задачею.

У роботах [4, 5] був розроблений чисельний метод стосовно до (ψ, ω) – системи рівнянь для функції току ψ і вихору ω . Загальним недоліком цих методів є використання в тому чи іншому вигляді граничної умови для вихору на твердій поверхні, яке відсутнє у фізичній постановці задачі. Наявність додаткового ітераційного процесу, зв'язаного із цією граничною умовою, обмежує швидкість збіжності чисельних алгоритмів. Крім того, очевидна обмеженість методів розв'язку (ψ, ω) – системи, зв'язана із неможливістю розвитку їх на випадок просторових течій в'язкої рідини і течій стисненого газу.

У роботі [6] був запропонований оригінальний метод «частинок в комірках», який в собі поєднує переваги лагранжева і ейлерова підходів [4]. Область розв'язку в даному методі розбиваються нерухомою (ейлеровою) сіткою; проте суцільне середовище трактується дискретною моделлю – розглядається сукупність «частинок» фіксованої маси (лагранжева сітка частинок), які і рухаються через ейлерову сітку комірок. Частинки служать для визначення параметрів самої рідини (маси, енергії, швидкості), в той час як ейлерова сітка використовується для визначення параметрів поля (тиску, густини, температури). Даний метод дозволяє досліджувати складні явища в динаміці багатокомпонентних середовищ, частинки добре слідкують за вільними поверхнями і лініями розділу середовищ тощо. Але основним недоліком даного методу є дискретне представлення суцільного середовища наслідком чого є чисельна нестійкість (флуктуації). Також важко отримати інформацію для областей із значним розрідженням, звідки практично уходять усі частинки.

Мета

Метою даної роботи є розробка ефективного чисельного методу розв'язку багатомірної системи рівнянь нерозривності і Нав'є-Стокса при помірних числах Рейнольдса, який має хороші консервативні властивості і допущення дискретизації складних обчислювальних областей, що призводить до стійкості результатів розрахунку і здатний досить точно описати локальні властивості течій.

Задачі

Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

1. Розглянути постановку задачі динаміки суцільної в'язкої слабостисненої рідини;
2. Розробити ефективний метод який дозволить досліджувати широкий клас плоских, вісесиметричних і просторових задач динаміки в'язкої слабостисненої рідини;
3. За допомогою розробленого методу виконати розрахунок задачі просторово-нестационарного обтікання тіла потоком в'язкої слабостисненої рідини.

Розв'язання задач

Як було показано любий реальний гідродинамічний процес може бути описаний системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка складається із рівняння нерозривності [2, 7] і рівняння Нав'є-Стокса [8].

Для розв'язку рівняння нерозривності [2] використаємо метод кінцевих об'ємів. Представимо рівняння нерозривності невстановленого руху рідини у загальному вигляді для площини Oxy :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де $\bar{q} = \bar{\rho}$ – густина рідини, $\bar{F} = \bar{\rho}\bar{u}_x$ – компонента швидкості рідини по вісі x , $\bar{G} = \bar{\rho}\bar{u}_y$ – компонента швидкості рідини по вісі y .

Застосовуючи метод підобластей [8] до рівняння (1) в середині кінцевого об'єму, що показаний на рисунку 1, отримуємо:

$$\int_{ABCD} 1 \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} \right) dx dy = 0, \quad (2)$$

або, якщо застосувати теорему Гріна [9]:

$$\frac{d}{dt} \int \bar{q} dV + \int_{ABCD} \bar{H} \cdot \bar{n} ds = 0, \quad (3)$$

де $\bar{H} = (\bar{F}, \bar{G})$. У декартових координатах маємо:

$$\bar{H} \cdot \bar{n} ds = \bar{F} dy - \bar{G} dx. \quad (4)$$

Рівняння (3) є констатацією консервативності [3, 8]. У частинному випадку, якщо обрати $\bar{q} = \bar{\rho}$, $\bar{F} = \bar{\rho}\bar{u}_x$, $\bar{G} = \bar{\rho}\bar{u}_y$, рівняння (3) співпадає з інтегральним формулюванням закону збереження маси [3]. Відповідно, метод кінцевих об'ємів зводиться до дискретизації вихідного рівняння, представленого в інтегральній формі [10], у протилежність методу кінцевих різниць [4, 9], який застосовується до вихідного рівняння в його диференційній формі.

Одним із приблизних представлень рівняння (3) може бути рівняння:

$$\frac{d}{dt} (\Lambda q_{j,k}) + \sum_{AB}^{DA} (F \Delta y - G \Delta x) = 0, \quad (5)$$

де Λ – площа чотирикутника $ABCD$, показаного на рисунку 1, причому $q_{j,k}$ є величина, яка зв'язана із середнім значенням q в середині чотирикутника. У рівнянні (5):

$$\Delta y_{AB} = y_B - y_A; \Delta x_{AB} = x_B - x_A; F_{AB} = 0,5(F_{j,k-1} + F_{j,k}); G_{AB} = 0,5(G_{j,k-1} + G_{j,k}), \quad (6)$$

І аналогічні вирази для Δy_{BC} і т. д. Якщо Λ не є функцією часу, тоді рівняння (5) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{dq_{j,k}}{dt} + 0,5(F_{j,k-1} + F_{j,k}) \Delta y_{AB} - 0,5(G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x_{AB} + 0,5(F_{j,k-1} + F_{j+1,k}) \Delta y_{BC} - \\ - 0,5(G_{j,k} + G_{j+1,k}) \Delta x_{BC} + 0,5(F_{j,k} + F_{j,k+1}) \Delta y_{CD} - 0,5(G_{j,k} + G_{j,k+1}) \Delta x_{CD} + \\ + 0,5(F_{j-1,k} + F_{j,k}) \Delta y_{DA} - 0,5(G_{j-1,k} + G_{j,k}) \Delta x_{DA} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо глобальна сітка (j, k) є нерегульованою, тоді записане для кінцевих об'ємів рівняння (7) забезпечує дискретизацію в декартових координатах, без необхідності введення узагальнених координат [9]. Якщо загальна сітка є однорідною і її лінії співпадають із лініями постійних x і y , тоді рівняння (7) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \frac{d}{dt} q_{j,k} - 0,5(G_{j,k-1} + G_{j,k}) \Delta x + 0,5(F_{j,k} + F_{j+1,k}) \Delta y + \\ + 0,5(G_{j,k} + G_{j,k+1}) \Delta x - 0,5(F_{j-1,k} + F_{j,k}) \Delta y = 0, \end{aligned}$$

або

$$\frac{d}{dt} q_{j,k} + \frac{F_{j,k} + F_{j+1,k}}{2\Delta x} + \frac{G_{j,k+1} + G_{j,k-1}}{2\Delta y} = 0, \quad (8)$$

що співпадає із апроксимацією, отриманою при представленні просторових кривих похідних в (1) за допомогою центральних різниць.

Метод кінцевих об'ємів, який застосовувався для опису течії як стисненої, так і нестисненої рідин володіє двома важливими перевагами. По-перше, він володіє хорошими консервативними властивостями (збереження маси тощо). По-друге, він допускає дискретизацію складних обчислювальних областей в більш простій, хоча і не обов'язково в такій же точній формі, чим це дозволяє ізопараметричне кінцево-елементне формулювання [11] або введення узагальнених координат [9].

Розглянемо рівняння Нав'є-Стокса в природних змінних:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla p + \nu \Delta \bar{V}, \quad \nabla \bar{V} = 0. \quad (9)$$

де ν – кінематична в'язкість досліджуваної рідини.

Для рішення проблеми із розрахунком поля тиску необхідно в рівняння нерозривності ввести член, який відповідає за шгучну стисливість, а саме: $(\partial / \partial t)(p + V^2 / 2)$. У результаті ми отримуємо модифіковану систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla p + \nu \Delta \bar{V}; \\ \frac{\partial \left(p + \frac{V^2}{2} \right)}{\partial t} + \nabla V = 0, \end{cases} \quad (10)$$

для розв'язку якої використаємо метод розщеплення по фізичним факторам.

Введемо наступні позначення: $\nabla \times \bar{V} = \omega$, $\nabla \bar{V} = D$, $\nabla \bar{V} = \tilde{D}$. Нехай у деякий момент часу $t_n = n\tau$ (τ – крок по часу, n – число кроків) відомі поля швидкості \bar{V} і тиску p рідини. Тоді схему визначення невідомих функцій в момент часу $t_{n+1} = (n+1)\tau$ можна представити у вигляді триетапної схеми розщеплення:

Етап I:

$$\frac{\bar{V} - \bar{V}^n}{\tau} = -(\bar{V}^n \nabla) \bar{V}^n + \nu \Delta \bar{V}^n. \quad (11)$$

Етап II:

$$\Delta p = -\frac{\tilde{D}}{\tau}, \quad \text{так як } D^{n+1} = 0. \quad (12)$$

Етап III:

$$\frac{\bar{V}^{n+1} - \bar{V}}{\tau} = -\nabla p. \quad (13)$$

Рівняння (13) отримуємо шляхом взяття дивергенції від обох частин рівності (9) із урахуванням рівняння нерозривності (умова соленоїдності [13] $\text{div} \bar{V}^{n+1} = 0$).

Розглянемо наступну фізичну інтерпретацію схеми розщеплення. На етапі I припускається, що перенос кількості руху (імпульсу одиниці маси) здійснюється тільки за рахунок конвекції або дифузії.

Отримане таким чином проміжне поле швидкості \bar{V} , не задовольняє умові нестисливості ($\tilde{D} \neq 0$). Слід

відмітити, що проміжне поле швидкості \bar{V} має досить визначений фізичний зміст. Дійсно, якщо застосувати оператор rot до вихідного рівняння (9) і до рівняння (11), а також врахувати, що $\text{rot} \bar{V} = \text{rot} \bar{V}^{n+1} = \omega^{n+1}$, тобто вже на етапі I проміжне поле швидкості у внутрішніх точках досліджуваної області течії зберігає вихрові характеристики.

На етапі II по знайденому проміжному полю швидкості із врахуванням умови соленоїдності вектору швидкості \bar{V}^{n+1} знаходиться поле тиску.

На етапі III пропонується, що перенос здійснюється тільки за рахунок градієнта тиску (конвекція або дифузія відсутні).

Таким чином, обчислювальний цикл має наступний вигляд: I – по відомому в початковий (або попередній) момент часу полю швидкості із рівняння (11) знаходиться проміжне поле швидкості, визначаючи тим самим праву частину рівняння (12); II – розв'язується рівняння Пуассона (12) для визначення тиску; III – підправляється остаточно (на даному шарі рідини по часу) поле швидкості (13). Цикл повторюється до виконання деякого критерію встановлення (якщо існує стаціонарний розв'язок) або до заданого моменту часу.

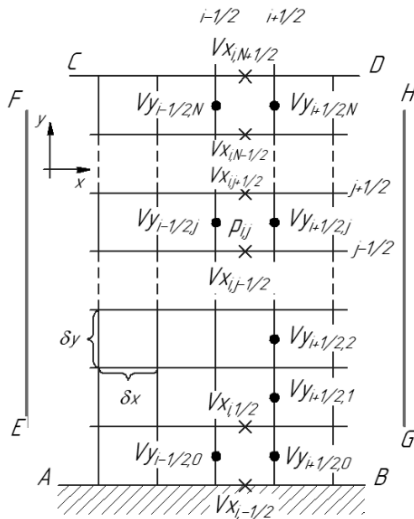


Рисунок 2 – Схема сіткового шаблону для метода розщеплення (двовірний випадок)

Для випадку декартової системи координат і рівномірної сітки (рис. 2) двовірний різницева схема має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_{y_{i+1/2,j}} - V_{y_{i+1/2,j}}^n}{\tau} = & \frac{(V_{y_{i,j}}^n)^2 - (V_{y_{i+1,j}}^n)^2}{h_1} + \\ & + \frac{(V_y V_x)_{i+1/2,j-1/2}^n - (V_y V_x)_{i+1/2,j+1/2}^n}{h_2} - \\ & - \frac{\nu}{\Delta y} \left[\left(\frac{V_{x_{i+1,j+1/2}}^n - V_{x_{i,j+1/2}}^n}{h_1} - \frac{V_{y_{i+1/2,j+1}}^n - V_{y_{i+1/2,j}}^n}{h_2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{V_{x_{i+1,j-1/2}}^n - V_{x_{i,j-1/2}}^n}{h_1} - \frac{V_{y_{i+1/2,j}}^n - V_{y_{i+1/2,j-1}}^n}{h_2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_{x_{i,j+1/2}} - V_{x_{i,j+1/2}}^n}{\tau} = & \frac{(V_{x_{i,j}}^n)^2 - (V_{x_{i,j+1}}^n)^2}{h_2} + \frac{(V_y V_x)_{i-1/2,j+1/2}^n - (V_y V_x)_{i+1/2,j+1/2}^n}{h_1} + \\ & + \frac{\nu}{h_1} \left[\left(\frac{V_{x_{i+1,j+1/2}}^n - V_{x_{i,j+1/2}}^n}{h_1} - \frac{V_{y_{i+1/2,j+1}}^n - V_{y_{i+1/2,j}}^n}{h_2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{V_{x_{i,j+1/2}}^n - V_{x_{i-1,j+1/2}}^n}{h_1} - \frac{V_{y_{i-1/2,j+1}}^n - V_{y_{i-1/2,j}}^n}{h_2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h_2^2} = \frac{D_{i,j}}{\tau}, \\ D_{i,j}^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} V_{y_{i+1/2,j}}^{n+1} = \tilde{V}_{y_{i+1/2,j}} - \frac{\tau}{h_1} (p_{i+1,j} - p_{i,j}), \\ V_{x_{i,j+1/2}}^{n+1} = \tilde{V}_{x_{i,j+1/2}} - \frac{\tau}{h_2} (p_{i,j+1} - p_{i,j}). \end{cases} \quad (17)$$

Схема (14) – (17) легко апроксимує рівняння (11) – (13) із другим порядком точності по просторовим змінним похибка апроксимації порядку $O(\tau, h^2)$, де $h = \max(\Delta x, \Delta y)$, де $h_1 = \Delta x$, $h_2 = \Delta y$.

Суттєвим моментом запропонованого метода є вибір граничних умов. Із-за наявності задач обтікання тіл кінцевих розмірів потоком в'язкої нестисненої рідини, можна виділити два основних типи граничних умов: умова на твердій поверхні і умова на лінії, достатньо віддаленій від обтікаючого тіла. Тобто, граничні умови на твердій поверхні (див. рис. 2):

$$\begin{cases} V_{x_{i,j-1/2}}^n = 0; \quad (\text{умова неперотікання}) \\ V_{y_{i+1/2,j-1/2}}^n = 0; \quad (\text{умова прилипання}) \end{cases} \quad (18)$$

із останнього випливає:

$$\tilde{V}_{y_{i+1/2,0}} = \frac{V_{y_{i+1/2,0}}^n}{2} + \frac{V_{y_{i+1/2,1}}^n}{6} + O(h_2^3). \quad (19)$$

Умова (19) дозволяє звільнитися від необхідного введення шару фіктивних комірок (усередині твердого тіла), що в багатьох розрахункових схемах [5] приводить до неявного обчислення значення вихору на твердій поверхні з першим порядком точності.

Замітимо, що у рамках запропонованого підходу не потрібно розраховувати значення вихору на твердій поверхні. Останнє може бути знайдене по обчисленому полю швидкостей із використанням якогось-небудь із різницевих представлень виразу для вихору в граничних точках:

$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (20)$$

Граничні умови на лінії, віддаленій від обтікаючого тіла (EF , CD , GH) (див. рис. 2), є умови у незбуреному потоці, які у випадку $U_\infty \parallel OX$ мають вигляд (наприклад, на CD):

$$V_{x_{i,N+1/2}}^n = 0, \quad V_{y_{i+1/2,N}}^n = 0. \quad (21)$$

При розрахунку поля тиску отримання однорідних граничних умов забезпечується із використанням підходу [7], який заключається в наступному. Вважаючи $V_{x_{i,N-1/2}}^{n+1} = 0$ (для випадку твердої поверхні) і $V_{x_{i,N+1/2}}^{n+1} = 0$ (для випадку лінії, яка віддалена від тіла), із (17) маємо:

$$\tilde{V}_{x_{i,N-1/2}} = \frac{\tau}{h_2} (p_{i,0} - p_{i,N-1}), \quad \tilde{V}_{x_{i,N+1/2}} = \frac{\tau}{h_2} (p_{i,N+1} - p_{i,N}). \quad (22)$$

Із урахуванням (22) різницеве рівняння для розрахунку тиску в пограничних комірках прийме вигляд:

$$p_{i,0} = \frac{1}{\frac{2\tau_0}{h_1^2} + \frac{2\tau}{h_2^2}} \left(\tau_0 \frac{p_{i-1,0} + p_{i+1,0}}{h_1^2} + \frac{p_{i,1} + p_{i,0}}{h_2^2} - \tilde{D}_{i,0'} \right), \quad (23)$$

де

$$\tilde{D}_{i,0'} = \frac{\tilde{V}_{y_{i+1/2,0}} - \tilde{V}_{y_{i-1/2,0}}}{h_1} + \frac{\tilde{V}_{x_{i,j+1/2}}}{h_2}, \quad \tau_0 = \frac{h_2^2}{8\nu}. \quad (24)$$

Аналогічно виписується співвідношення для $p_{i,N}$.

Чисельна реалізація запропонованого метода включає наступні три етапи.

Етап I. Із рівняння (14) визначаються значення $\tilde{V}_{y_{i+1/2,j}}$, $\tilde{V}_{x_{i,j+1/2}}$ із використанням умов (18) (за виключенням пограничних значень $\tilde{V}_{y_{i+1/2,0}}$). По розрахованим значенням $V_{y_{i+1/2,j}}^n$ у внутрішніх вузлах області із (19) знаходяться $\tilde{V}_{y_{i+1/2,0}}$.

Етап II. Поле тиску визначається із (16). У пограничних комірках використовуються співвідношення (23).

Етап III. Із (17) знаходяться значення $V_{y_{i+1/2,j}}^{n+1}$, $V_{x_{i,j+1/2}}^{n+1}$. У якості початкового наближення $V_{y_{i+1/2,j}}^{n+1}$, $V_{x_{i,j+1/2}}^{n+1}$ вибираються довільні функції, які задовольняють необхідні граничні умови.

Стаціонарний розв'язок системи рівнянь (14) – (17) отримуємо в результаті повторення вказаних етапів до виконання наступного критерію встановлення:

$$\max_{i,j} \left| V_{y_{i+1/2,j}}^{n+k} - V_{y_{i+1/2,j}}^n \right| \leq \varepsilon. \quad (25)$$

Дослідження стійкості можна провести поетапно. Критерій стійкості першого етапу може бути отриманий за допомогою першого диференційного наближення [8]. Стосовно до рівнянь (14) перше диференційне наближення має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V_y^2}{\partial x} + \frac{\partial V_y V_x}{\partial y} = \left(\nu - \frac{\tau}{2} V_y^2 \right) \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \left(\nu - \frac{\tau}{2} V_x^2 - \frac{h_2^2}{4} \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_y V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y^2}{\partial y} = \left(\nu - \frac{\tau}{2} V_y^2 - \frac{h_1^2}{4} \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \left(\nu - \frac{\tau}{2} V_x^2 \right) \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (26)$$

Із (26) випливає критерій стійкості, який використовує різницеву схему ($h_1=h_2$):

$$\tau = \frac{4\nu}{V_x^2 + V_y^2}. \quad (27)$$

Виключивши p із (16) і (17), за допомогою методу Фур'є [12] легко показати безумовну стійкість другого і третього етапів.

За допомогою описаного метода в CFD-програмі FlowVision [11], на потужностях КС Інститута кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, були отримані розв'язки цілого ряду задач зовнішньої гідродинаміки [2, 13]. Розглянемо деякі результати розв'язку задачі для поперечного обтікання кругового циліндра радіуса $a=1$ м, вісь якого перпендикулярна вектору швидкості набігаючого потоку U_∞ на на 250000 розрахункових комірках. Картини течії для різних чисел Рейнольдса ($Re=2aU_\infty/\nu$) представлені на рисунку 3.

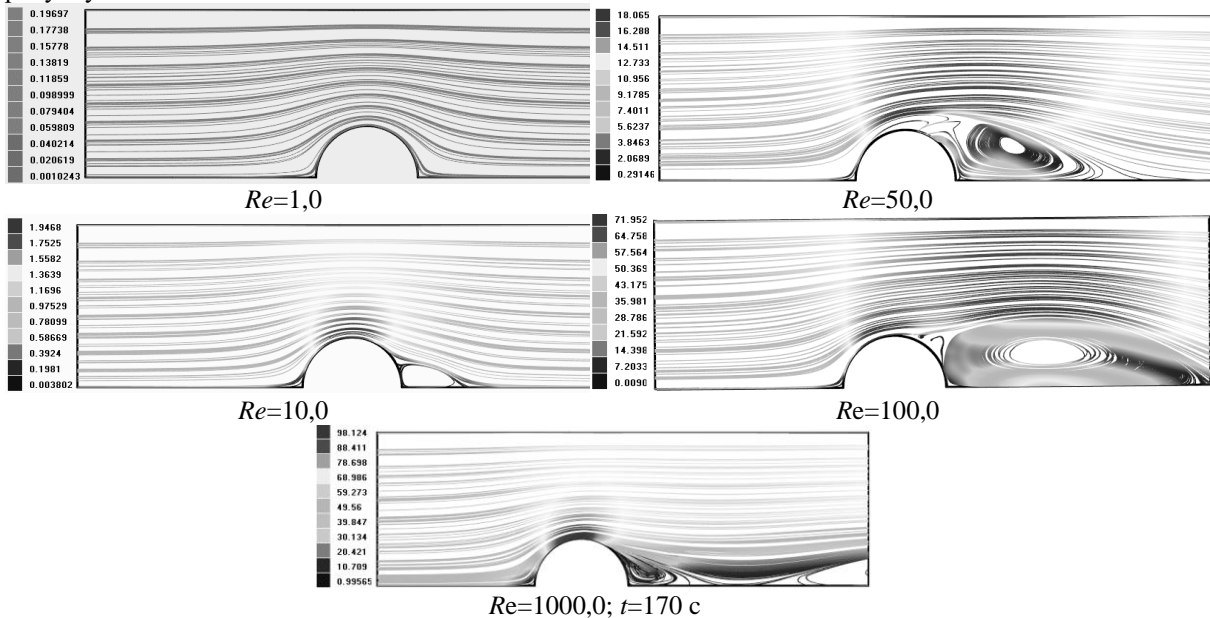


Рисунок 3 – Схема обтікання циліндру (лінії току) при різних числах Рейнольдса

Також на рисунку 3 представлені числові дані швидкості (м/с) набігаючого потоку рідини. В останньому випадку ($Re=1000,0; t=170$ с) (див. рис. 3) спостерігається нестационарна картина течії (має місце визначений ріст застійної зони і в деякий момент часу відбувається).

На рисунку 4 представлені результати розрахунку даним методом (криві 1) в порівнянні із результатами, отриманими за допомогою методу спільної блочної релаксації [5] (криві 2).

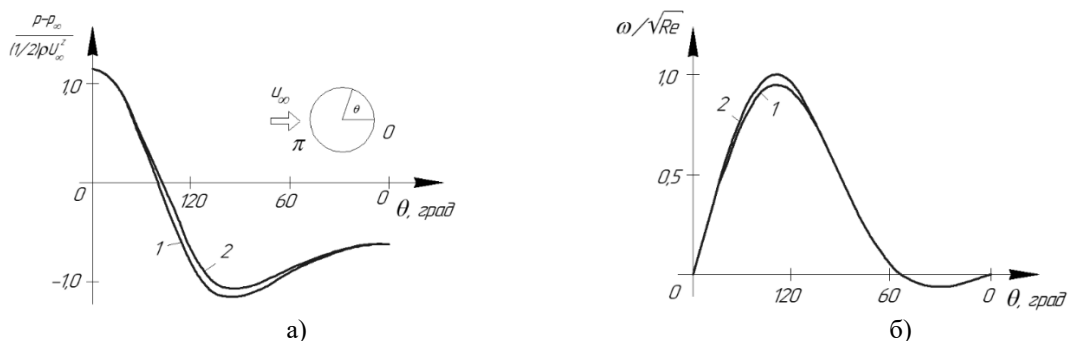


Рисунок 4 – Діаграма розподілу тиску (а) і вихору (б) по поверхні циліндру при $Re=50$: 1 – розрахунок вищевказаним методом; 2 – розрахунок методом [6]

Отримані результати показали високу збіжність результатів розрахунку на кутах до 60° і на кутах біля 180° для розподілу тиску (див. рис 4, а) і вихору (див. рис 4, б) течії рідини по поверхні циліндру при $Re=50$.

Висновки

1. Запропонований метод чисельного моделювання гідродинамічних процесів має певні сильні сторони в порівнянні із відомими чисельними методами [4-6], де різниці в представлення виконання умови прилипання приводить, із необхідністю, до визначення граничного значення вихору на твердій поверхні тіла, наслідком чого є відсутність балансу сил на твердій поверхні.

2. Різницева схема даного методу дозволяє розраховувати поле течії без використання значень вихору і тиску на твердій поверхні. Результати проведених розрахунків, а також пробні розрахунки тривимірних течій, виконані із використанням даного підходу, свідчать про його ефективність.

3. Також даний метод дозволяє проводити по єдиному алгоритму розрахунки обтікання плоских, осесиметричних і тривимірних тіл складної конфігурації потоком в'язкої слабостисненої рідини, а також внутрішніх течій в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

Список літератури

- [1] А. А. Яровий, *Методи та засоби організації високопродуктивних паралельно-ієрархічних обчислювальних систем із рекурсивною архітектурою*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2016.
- [2] Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський "Моделювання робочих процесів гідропульсного привода з однокаскадним клапаном пульсатором," *Вібрації в техніці та технологіях*, № 3(86), С.10–19, 2017.
- [3] Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський "Моделювання робочих процесів в піролізній установці для утилізації відходів," *Східно–європейський журнал передових технологій*. – Том 1, № 8(79), С.11–20, 2016. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.59419>.
- [4] F. H. Harlow, J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids*, 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182 – 2189.
- [5] Amsden A. A., Harlow F. H. *The SMAC method*. – Los Alamos Scientific Lab., Rept. NLA-4370. Los Alamos, 1970.
- [6] C. R. Easton "Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method," *J.Comput. Phys*, V. 9, N. 2, P. 375-379, 1972.
- [7] Р. Д. Іскович–Лотоцький, О. В. Зелінська, Я. В. Іванчук, *Технологія моделювання оцінки параметрів формоутворення заготовок з порошкових матеріалів на вібропресовому обладнанні з гідропульсним приводом*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2018.
- [8] Р. Д. Іскович–Лотоцький, Н. Р. Веселовська, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський, "Розрахунок температурних полів в робочих зонах піролізної установки," *Міжсвузівський збірник наукових праць "НАУКОВІ НОТАТКИ"*. Випуск 42, С. 113–120, 2013.
- [9] К. Флетчер, *Вычислительные методы в динамике жидкостей*: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
- [10] Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, *Вібраційні та віброударні пристрої для розвантаження транспортних засобів*. Вінниця, Україна, 2012.
- [11] FlowVision – Made of access: World Wide Web – <https://fv-tech.com/en/>.
- [12] F. R. Menter, M. Kuntz, and R. Langtry (2003) "Ten years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*, Begell House, Inc., 8 p.
- [13] Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський "Моделювання процесу спряженого теплообміну в установці для утилізації відходів" *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, – №3(126), С. 51 – 57, 2016.

References

- [1] A. A. Yaroyvi, *Metody ta zasoby orhanizatsii vysokoproduktyvnykh paralelno-iierarhichnykh obchyslivalnykh system iz rekursyvnoiu arkhitekturoiu*. Vinnytsia, Ukraina: VNTU, 2016.
- [2] R. D. Iskovych–Lototskyi, Ya. V. Ivanchuk, Ya. P. Veselovskyi "Modeliuvannia robochykh protsesiv hidro-impulsnoho pryvoda z odnokaskadnym klapanom pulsatorom," *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*, № 3(86), S.10–19, 2017.
- [3] R. D. Iskovych–Lototskyi, Ya. V. Ivanchuk, Ya. P. Veselovskyi "Modeliuvannia robochykh protsesiv v piroliznii ustanovtsi dlia utylizatsii vidkhodiv," *Skhidno–ievropeyskyi zhurnal peredovykh tekhnolohii*. – Том 1, № 8(79), S.11–20, 2016. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.59419>.
- [4] F. H. Harlow, J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids*, 1965. – V. 8, N. 12. – P. 2182 – 2189.
- [5] Amsden A. A., Harlow F. H. *The SMAC method*. – Los Alamos Scientific Lab., Rept. NLA-4370. Los Alamos, 1970.

- [6] C. R. Easton "Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method," J.Comput. Phys, V. 9, N. 2, P. 375-379, 1972.
- [7] R. D. Iskovych-Lototskyi, O. V. Zelinska, Ya. V. Ivanchuk, Tekhnolohiia modeliuвання otsinky parametriv formoutvorennia zahotovok z poroshkovykh materialiv na vibropresovomu obladnanni z hidroimpuls-nym pryvodom. Vinnytsia, Ukraina: VNTU, 2018.
- [8] R. D. Iskovych-Lototskyi, N. R. Veselovska, Ya. V. Ivanchuk, Ya. P. Veselovskyi, "Rozrakhunok temperaturnykh poliv v robochykh zonakh piroliznoi ustanovky," Mizhvuzivskyi zbirnyk naukovykh prats "NAUKOVI NOTATKY". Vypusk 42, S. 113-120, 2013.
- [9] K. Fletcher, Vychyslytelnye metody v dynamyke zhydkosti: V 2-kh tomakh: T. 1: Per. s anhl. – M.: Myr, 1991. – 504 s.
- [10] R. D. Iskovych-Lototskyi, Ya. V. Ivanchuk, Vibratsiini ta vibroudarni prystroi dlia rozvantazhennia transportnykh zasobiv. Vinnytsia, Ukraina, 2012.
- [11] FlowVision – Made of access: World Wide Web – <https://fv-tech.com/en/>.
- [12] F. R. Menter, M. Kuntz, and R. Langtry (2003) "Ten years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, Begell House, Inc., 8 p.
- [13] R. D. Iskovych-Lototskyi, Ya.V. Ivanchuk, Ya.P. Veselovskyi "Modeliuвання protsesu spriazhenoho teploobminu v ustanovtsi dlia utylizatsii vidkhodiv" Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu, – №3(126), S. 51 – 57, 2016.
Стаття надійшла: 09.04.2019.

Відомості про авторів

Іванчук Ярослав Володимирович – к.т.н., доцент, доцент кафедри галузевого машинобудування Вінницького національного технічного університету, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.

Яровий Андрій Анатолійович – д.т.н., проф., завідувач кафедри компютерних наук Вінницького національного технічного університету, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.

Коваль Костянтин Олегович – к.т.н., доцент, завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом Вінницького національного технічного університету, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.

Y. V. Ivanchuk, A. A. Yarovy, K. O. Koval

NUMERICAL SIMULATION METHOD OF HYDRODYNAMIC PROCESSES

Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Я. В. Иванчук, А. А. Яровой, К. О. Коваль

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Винницкий национальный технический университет, г. Винница