УДК 37.022.32: 681.3

С. А. Кирилащук, З. В. Бондаренко, В. І. Клочко, Т. Г. Кирилащук

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ОДНА ІЗ СКЛАДОВИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ІНЖЕНЕРІВ

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Анотація. У статті досліджено проблему оволодіння навичками числового моделювання студентами інженерних спеціальностей під час вивчення курсу вищої математики. Значна увага приділяється формуванню творчого мислення студентів у процесі навчання вищої математики. Основними компонентами методичної системи є використання систем комп’ютерної математики (СКМ) під час лекцій, практичних та індивідуальних занять. Використовуючи СКМ MathCAD, Maple та інші, студент може абстрагуватися від технічних деталей програмування, особливостей операційної системи та зосередити увагу на аналізі особливостей таких понять, як обумовленість задачі, стійкість методу, оцінювання результатів розрахунків. Професійна спрямованість підготовки майбутніх фахівців розглядається як творча, сповнена сучасних знань з математики та інформатики діяльність. Наведені приклади завдань можуть бути використані студентами з високим когнітивним рівнем для самостійного опрацювання. Пропонується формування змісту курсу вищої математики здійснювати у таких напрямках: підсилення ролі числових методів і їх реалізацію за допомого СКМ; використання математичного моделювання під час розв’язування прикладних задач; оволодіння студентами математичними змістово-фаховими знаннями, необхідними для аналітичного і числового моделювання практичних інженерних задач, створення власних бібліотек користувача програмних продуктів. Виділено головні вміння й навички, які можуть бути сформовані у студентів під час інтегрованих занять з вищої математики і елементів числового моделювання: уміння використовувати необхідні програмні засоби в середовищі СКМ; уміння зіставляти результати в різних формах подання (аналітичне й графічне подання); уміння використовувати нові можливості, що надаються комп'ютерними технологіями, заснованими на використанні середовища СКМ; уміння проектувати в середовищі СКМ програмні засоби першого рівня складності для розв’язування навчальних і предметних завдань.
Ключові слова: курс вищої математики, поняття числового моделювання, стійкість, оцінювання результатів.
Abstract. The article investigates the problem of mastering the skills of numerical modeling by students of engineering specialties while studying the course of higher mathematics. Much attention is paid to the formation of creative thinking of students in the process of learning mathematics. The main components of the methodological system using SCM in lectures, practical and individual classes.
Using SCM MathCAD, Maple and others, the student can abstract from the technical details of programming, features of the operating system and focus on analyzing the features of such concepts as conditionality of the problem, stability of the method, evaluation of calculation results. Professional orientation of training future professionals with good personal qualities and is seen as creative, full of modern knowledge in mathematics and computer science. The given examples of tasks can be used for independent solution by students with a high cognitive level. Forming of maintenance of course of higher mathematics is offered to carry out in such directions: strengthening of role of numerical methods and their realization after dopomogo of SKM; the use of mathematical design is during untiing of the applied tasks; capture students mathematical semantically professional by knowledges, necessary for the analytical and numerical design of practical engineerings tasks, creation of own libraries of user of software products. Main abilities and skills which can be formed for students during computer-integrated employments after higher mathematics and elements of numerical design are selected: ability to use necessary programmatic facilities in the environment of SKM; ability to compare results in the different forms of presentation (analytical and graphic presentation); ability to use new possibilities, which are given computer technologies, based on the use of environment of SKM; ability to design programmatic facilities of the first in the environment of SKM; ability to design in the environment of SKM programmatic facilities of the first level of complication for untiing of educational and subject tasks.
Key words: numerical modeling, higher mathematics, stability, evaluation of calculation results.
DOI: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2022-55-3-74-84.

Вступ

Використання математичних методів у різноманітних галузях інженерної діяльності потребує певного рівня математичної компетентності і високого рівня математичної підготовки. Рівень розвитку науки і техніки вимагає від фахівців, перш за все, самостійного поповнювання знань та оволодіння новими знаннями.

Інженерна практика наших днів все частіше зустрічається з математичними задачами, точний розв’язок яких досить складний, тому застосовують ті чи інші наближені методи обчислення, які набули за останні роки широкого розвитку.

У законодавчих документах про освіту передбачено спрямованість навчання у ЗВО в напрямку розвитку інтелектуальних здібностей студентів. Це потребує переорієнтації самостійної діяльності студентів переважно на вирішення навчальних професійно зорієнтованих завдань, що реалізується через засвоєння необхідного мінімуму інформації та використання довідкових навчальних засобів [4;8]. Засобами реалізації такого підходу на заняттях з вищої математики може бути математичне моделювання з використанням СКМ MathCAD, Maple, Maxima, Derive, Excel і інші. Це пов’язано з тим, що моделювання визнано універсальним методом пізнання, а, отже, ефективним інструментом навчальної діяльності [2;5;12].

Числове моделювання – це досить складний курс у циклі інформатичних дисциплін. У підготовці фахівців, він є міждисциплінарним курсом. Для успішного оволодіння ним потрібні найрізноманітніші знання. Для моделювання фізичних процесів потрібні знання в обраній предметній галузі, необхідно мати певний рівень знань законів фізики. Моделюючи економічні процеси – потрібні знання законів економіки тощо. Крім того, оскільки комп'ютерне моделювання використовує практично весь апарат сучасної математики, передбачається наявність знань з основних математичних дисциплін – алгебри, математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики, теорії імовірності. Для вирішення математичних завдань необхідно володіти в повному обсязі числовими методами розв'язування нелінійних рівнянь, систем лінійних рівнянь, диференціальних рівнянь, елементами функціонального аналізу, теорії наближення функції тощо.

Актуальність

Нині в теорії та практиці вищої освіти накопичено значні наукові напрацювання, що висвітлюють нові тенденції і потреби її розвитку в умовах суспільного реформування. Це роботи з питань інформатизації освіти взагалі й математичної освіти зокрема (М. І. Жалдак, В. І. Клочко, Н. В. Морзе, С. А. Раков, С. О. Семеріков, О. В. Співаківський, Ю. В. Триус та ін.); з питань впровадження компетентнісного та інтеграційного підходів у вищу освіту (М. І. Жалдак, І. М. Козловська, Ю. С. Рамський, Г. К. Селевко, Р. М. Собко, О. М. Спірін, Т. Д. Якимович та ін.); з питань комп'ютерного моделювання, зокрема використання систем комп'ютерної математики (СКМ), у процесі навчання математики (З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук, В. І. Клочко, Т. П. Кобильник, Н. М. Кузьміна, В. М. Михалевич і інші). Аналіз їхніх наукових здобутків показав, що впровадження у навчальний процес даного підходу є основою підготовки фахівців з вищою освітою, які здатні забезпечувати конкурентоспроможність України. Незважаючи на значні наукові здобутки в теорії педагогічної освіти, проблема математичної підготовки майбутніх фахівців, знаходження шляхів оновлення змісту математичної освіти на основі інтеграції математичних і спеціальних інформатичних дисциплін на методологічному, методичному та змістовному рівнях, не вирішена, тому у статті розглядаються порушені питання

Мета

Метою даної роботи є з'ясування можливостей в курсі вищої математики знайомити студентів із особливостями складових моделювання, зокрема числового моделювання.

Задачі

Перша. Розглянути деякі аспекти технології інтегративного навчання вищої математики з елементами числового моделювання.
Друга. Формування комплексу компетентнісно-орієнтованих завдань, вирішення яких вимагає встановлення різноманітних інтеграційних зв'язків інформатичних і математичних дисциплін.
Третя. Виділити головні вміння й навички, які можуть бути сформовані у студентів під час інтегрованих занять з вищої математики і елементів числового моделювання.

Розв'язання задач

Сьогодні не можна готувати фахівців завтрашнього дня, не включаючи в навчальні програми базової математичної підготовки нові розділи математики розроблені в останні десятиліття.

Залежно від аудиторії студентів та їх спеціалізації це можуть бути теорія вейвлетів, матричний аналіз або методи розв'язання нелінійних рівнянь і т.д. Нові математичні поняття, зокрема ті, що відносяться до числового моделювання, можуть бути впроваджені в навчальний процес: 1) частково за рахунок деякого ущільнення програм зі стандартного курсу вищої математики (це цілком можливо, оскільки з ключовими поняттями математичного аналізу похідної та визначеним інтегралом студенти знайомляться, хоча й недостатньо глибоко, ще в середній школі); 2) частково за рахунок необов'язкового, незатребуваного (фахівцями даного профілю) матеріалу. Тобто, формуються своєрідні "сплайн-розділи" курсу вищої математики.

Числові методи дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. При цьому розв'язок визначається як набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різним способом (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Їх перевагами є: абсолютна універсальність, тому що теоретично можуть бути застосовані для розв'язання переважної більшості задач. Таким чином, числові методи є основним апаратом розв'язання математичних задач, а їх значущість тільки збільшуватиметься у міру вдосконалення комп'ютерної техніки.

Головним завданням числових методів є знаходження розв'язку з необхідною точністю, що оцінюється. У знаннях, яких набуває студент під час вивчення числових методів, інтегруються теоретично-методичні знання та практичні уміння і навички. За рахунок конкретності характеру використання матеріалу, створюються умови його ґрунтовного засвоєння, формування математичних і професійно спрямованих компетентностей: оволодіння методами аналізу і синтезу, інтерпретування отриманого математичного результату, здатність застосовувати методи аналізу та синтезу і числового моделювання за допомогою СКМ.

Виділимо головні вміння й навички, формування яких поглиблюється у студентів під час вивчення дисципліни вищої математики: уміння використовувати необхідні програмні засоби в середовищі СКМ. Згідно з Россом Тернером [9], до набору компетентностей, які є фундаментальними для загальнокультурного розвитку людини, входять такі компетентності: уміння аналізувати результати у різних формах подання інформації (аналітичного й графічного подання); уміння створювати в середовищі СКМ програмні засоби доступного рівня складності для розв'язання навчальних і предметних завдань; уміння виявлення помилок, не довіряючи результату обчислень; уміння вибирати з цілої низки рішень оптимальний. Студенти набувають досвіду подання завдання у вигляді програми, що була б простішою у використанні.

Побудова навчального процесу з урахуванням компетентностей XXI століття покликана забезпечити набуття всіма студентами знань і навичок, необхідних для того, щоб досягти успіху в світі, де зміни є постійними і навчання ніколи не зупиняється [3].

Слід зазначити, що під час вивчення курсу вищої математики або додаткових математичних дисциплін у студентів виникають значні труднощі, які пояснюються тим, що у них не сформувалася здатність аналізувати стан задачі, виділяти суттєві зв'язки між даними і компонентами системи, знаходити раціональний метод розв'язання, аналізувати результати. Для розвитку таких навичок доцільно застосовувати різні форми самостійної роботи студентів, оскільки самостійна робота над навчальним матеріалом – головне в освітній діяльності кожного студента. Активізація пізнавальної діяльності студентів, розвиток здатності самостійно вирішувати проблеми можуть бути досягнуті в результаті індивідуалізації навчання.

Етап формалізації математичної задачі (математична постановка) є першим етапом моделювання. На цьому етапі описується система, що досліджується: визначається її цільове призначення, характер діяльності, використовувані ресурси, описуються нормативні параметри. При постановці завдання відбувається вивчення об'єкта моделювання (системи, процесу), аналіз доступної інформації, визначення обмежень та припущень. Побудова математичної моделі починається з формулювання системи обмежень, у яких функціонуватиме дана модель, а також сукупності правил, що визначають допустимі значення проміжних результатів обчислення.

До одного із можливих завдань курсу вищої математики відноситься організація систематичного цілеспрямованого вивчення окремих складових технології комп'ютерного та числового моделювання. Це повинно розв'язати суперечності між можливостями інформатизованої методичної системи розвитку інтелектуальних здібностей студентів у процесі застосування комп'ютерного моделювання у навчанні вищої математики і реальним навчальним процесом.

Для оцінки числових методів, тобто порівняння між собою методів для розв'язання однієї задачі, вводять такі їх основні характеристики: трудомісткість; порядок методу; збіжність; швидкість збіжності; стійкість до похибок обчислень; стійкість до похибок у початкових даних.

Розгляд питання про способи зменшення обчислювальних похибок доцільно розпочати з конкретних прикладів типу: обчислення значення $\sin(x)$, користуючись розкладом функції за степенями *x*, використовуючи для цього на лекції відповідні СКМ. Скориставшись програмою і задавши значення аргументу $x = 0.5236$ ($x \approx \frac{\pi}{6}$) і $x = 25.6564$ ($x \approx 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$) відповідно отримаємо 0.500001; 0.5000519569. На прикладах згаданого типу і інших звертаємо увагу на ті проблеми, які виникають при розв'язуванні задач з використанням СКМ. Досвід показує, що такий підхід до вивчення цих питань дає позитивні наслідки не лише при вивченні розділу, а й курсу в цілому.

Творчий інженер не обмежується лише використанням алгоритмів. Він повинен знати, як це робиться. В іншому випадку він перестає бути інженером і стане заручником комп'ютера.

Зазвичай, на перших порах використання будь-якої із систем символьних обчислень, студент досить легко вирішує невеликі і нескладні навчальні приклади і задачі. Проте, під час розв'язання фахових задач, він стикається з низкою проблем: суттєві витрати часу на обчислення, не вистачає пам'яті, часто результат видається неправильний або не завжди зрозумілим. Тому, під час вивчення основного змісту курсу вищої математики варто знайомити студентів з контрприкладами та розв'язувати їх за допомогою СКМ. Це, до деякої міри, переконає студентів у тому, що не продумане застосування СКМ може нести в собі великі проблеми.

Досвід роботи з першокурсниками показує, що вони не завжди чітко усвідомлюють, що означає знайти корінь рівняння заданої точності. За означенням, x_i є наближенням кореня рівняння $f(x)=0$ з точністю ε, якщо виконується умова $\left|f(x_i)\right| < \varepsilon$, де ξ – точний корінь рівняння даного рівняння.

Проблема в тім, що точний корінь ξ невідомий (та й він переважно і не буде знайденим), тому й саму різницю $| x_i - \zeta | < \varepsilon$ порахувати неможливо. У студентів, які вільно оперують числами, виникають запитання: "Що ж порівнювати?", "Коли ж зупиняти процес знаходження кореня?", "Чому найчастіше користуються обмеженнями $y=(x+C)e^{-\sin x}$, $y=(x+2)e^{-\sin x}$, або $\left|f(x_i)\right| < \varepsilon$ для забезпечення заданої точності?". Найкраще вирішити ці проблеми графічно, показавши відрізки $\left|\zeta, x_i\right|$, $\left|x_i,\ x_{i-1}\right|$, $\left|f(x_i)\right|$.

Така наочність допоможе визначити незрозумілі місця і, опріч цього, дасть змогу вибирати критерій зупинки процесу залежно від поведінки функції $f(x)$ (наприклад, для швидко зростаючої $f(x)$ умова

$\left|f\left(x\right)\right| < \varepsilon$ не годиться). Точні оцінки кореня для кожного методу, зокрема можна подати без виведення, або запропонувати звернутись до літератури [7; 15].

Деякі методи не передбачають задання початкових наближень кореня. Таким чином, процес формування компетентності включає знання про доступні допоміжні засоби та інструменти (методи), а також їх потенціал, обмеження та можливість використовувати їх вдумливо та ефективно.

Поряд із задачами розв'язування рівнянь, значна кількість інженерних задач зводиться з рештою до наближеного розв'язування як конкретних рівнянь так і систем рівнянь, що описують поведінку об'єкта дослідження.

Особливу увагу доцільно звернути на поняття стійкості, оскільки вивчення стійкості є одним з центральних питань чисельних методів. Звертаємо увагу студентів і на те, що необхідно розрізняти стійкість задачі і стійкість алгоритму її розв'язання. Доцільно не обмежуватись теоретичними питаннями, а навести конкретні приклади нестійких задач (задача диференціювання, приклад Уілкінсона і ін.) із нестійких алгоритмів.

До нестійких алгоритмів також відноситься пошук коренів многочленів великих степенів. У свій час сподівались розв'язати цю проблему за допомогою швидкодії обчислення. Прикладом проблеми є пошук коренів многочлена $p(x) = \left(x-1\right)\left(x-2\right)\ldots\left(x-20\right)$, якщо розкрити дужки і до коефіцієнта $a_{19} = 210$ при x^{19} додати 2^{-23}, тобто, $\tilde{a}_{19} = 210 + 2^{-23}$. Очевидними коренями многочлена є $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_{20} = 20$. Але обчислення при $\tilde{a}_{19} = 210 + 2^{-23}$ за допомогою СКМ дає частину – 10 дійсних коренів $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 3.91$, і частину – 10 комплексних коренів таких як $x_{19} = 21.129 - 1.996i$, $x_{20} = 21.672 - 0.552i$. На деяких СКМ можуть бути отримані комплексно-спряжені корені. Отриманий результат протирічить інтуїції і наявності очевидних коренів. Проте проблему нестійкості алгоритмів обчислення коренів многочлена математиками було розв'язано.

Необхідно оцінювання чутливості задачі відносно похибок. Запишемо поліном у вигляді

$$p\left(x, \tilde{a}_{19}\right) = x^{20} + \tilde{a}_{19}x^{19} + \ldots$$

Далі обчислюється похідна $\dfrac{\partial x}{\partial \tilde{a}_{19}} = -\dfrac{\dfrac{\partial p}{\partial \tilde{a}_{19}}}{\dfrac{\partial p}{\partial x}}$.

Міра чутливості для коефіцієнта $\tilde{a}_{19}$ складає 3.1×10^{8}, одна з найбільших (для $\tilde{a}_4 = 2.2\times10^{-3}$). Оскільки наближені результати розв'язування задачі без їх точності немає цінності, то вивчення необхідних правил, методів обов'язково повинно бути у навчанні студентів і не лише під час вивчення числових методів (здатність застосовувати аналітичні та числові методи вирішення завдань за допомогою СКМ).

Наприклад, для рівняння $\dfrac{1}{x} = 0$, яке, очевидно, не має дійсних коренів, але для довільної, як завгодно малої точності, знайдеться *x*, що задовольняє критерію $\left|f(x_{k+1})\right| \le \varepsilon : \left|\dfrac{1}{x_{k+1}}\right| \le \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 0.00001$, то $x_{k+1} = 200000$, тобто знайдено число, що задовольняє заданий критерій точності пошуку розв'язку задачі.

Наведені приклади показують, що до результатів комп'ютерних обчислень необхідно завжди ставитися критично, аналізувати їх щодо правдоподібності. Щоб уникнути "підводних каменів" під час використанні будь-якого стандартного пакета, що реалізує числові методи, потрібно мати уявлення про те, який саме числовий метод реалізований для вирішення тієї чи іншої задачі. Наприклад, коли відомий інтервал, в якому розміщений корінь, то можна скористатися іншими методами уточнення кореня.

Однією з проблем наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь є аналіз похибок та стійкості. Тому особливу увагу доцільно на це звернути, оскільки вивчення стійкості є одним з центральних питань не лише в галузі звичайних диференціальних рівнянь, а й числових методів взагалі. На заняттях з вищої математики викладач звертає увагу студентів і на те, що необхідно розрізняти стійкість задачі і стійкість алгоритму її розв'язання. Доцільно не обмежуватись теоретичними питаннями, а навести конкретні приклади нестійких задач і нестійких алгоритмів. Зокрема, можна навести приклад диференціального рівняння $y'(t)=\lambda yna(t),\ \lambda\in C,\ t\geq 0,\ y(0)=y_0$. Це рівняння є моделлю для прогнозування стійкості числових методів розв'язування нелінійних систем диференціальних рівнянь. Щодо нестійкості алгоритмів можна запропонувати студентам довести, що сума $y_{n+1}=-y_n+2y_{n-1}+3hf\left(x_n,y_n\right)$ двох стійких алгоритмів $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf\left(x_n,y_n\right)$ та $y_n=y_{n-1}+hf\left(x_n,y_n\right)$ не дає стійкого алгоритму.

Проаналізувати похибки, що породжуються алгоритмом, можна шляхом дослідження впливу похибок на заокруглення в арифметичних операціях. Однією з багатьох причин виникнення похибок у результатах обчислень є похибки заокруглення під час множення і ділення у скінченно розрядній арифметиці є втрата значущих цифр під час операції віднімання близьких чисел.

Студентам це можна показати на прикладі обчислення часткової суми (із використанням СКМ) $S_{1000000}=\sum_1^{1000000}\frac{1}{n^2}$ ряду $\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ за двома алгоритмами

$$S_n=S_{n-1}+\frac{1}{n^2};\ n=1,\ 2,...,1000000,\ S_0=0;$$

$$\sum_{n-1}=\sum_{n}+\frac{1}{n^2};\ n=1000000,...,2,1;\ \sum\nolimits_{1000000}=0$$

Студенти переконаються у тому, що похибка обчислення за другим алгоритмом на 20% менша. Досить часто втрата значущих цифр суттєво спотворює результат під час розв'язування СЛАР.

Ознайомимося також із іншими поняттями проблем числового моделювання та відповідним оцінюванням процесу і результатів моделювання.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $AX=B$ часто виникають із експериментів, то коефіцієнти системи отримуються з похибками, коли навіть їх задають формулами, до того ж, під час обчислення, виникають похибки округлення коефіцієнтів. У зв'язку з цим виникає важливе питання, як впливають похибки коефіцієнтів системи на розв'язок. Або іншими словами, як можна виміряти чутливість розв'язку X по відношенню до змінювання матриць A і B?

Оцінювання відносної похибки правої частини системи викликають зміни у розв'язку більші у $C(A)$ разів. Де $C(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ міра (число) обумовленості матриці і використовується для грубішого оцінювання характеристик матриці, $\|A\|$ − норма матриці, що обчислюється за однією з формул $\|A\|=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$, число обумовленості матриці обчислюємо за такою формулою (чому ?):

$$C(A)=\frac{\Delta X\cdot\|B\|}{\Delta B\cdot\|X\|}.$$

Приклад. Нехай систему $AX=B$ задано матрицями $A=\begin{pmatrix}10 & 50\\ 15 & 75.1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}110\\ 165\end{pmatrix}$. Розв'язком системи є матриця $X=\begin{pmatrix}11\\ 0\end{pmatrix}$. Змінимо лише елементи матриці B, $B_1=\begin{pmatrix}110\\ 165.04\end{pmatrix}$, розв'язок змінюється суттєво $X_1=\begin{pmatrix}9\\ 0.4\end{pmatrix}$.

Виконаємо відповідні обчислення норм матриць і число обумовленості матриці

$$\|B\|=275,\ \|X\|=11,\ \Delta B=\|B_1-B\|=0.04,\ \Delta X=\|X_1-X\|=2.6,\ C(A)=\frac{\Delta X\cdot\|B\|}{\Delta B\cdot\|X\|}=1625.$$

Велике число обумовленості матриці пояснює чому малі зміни матриці B (відносна похибка 0.000145 (0.0145%)), викликала суттєві зміни розв'язку – 0.236 (23.6%).

В основному виникають такі проблеми під час розв'язування систем великої розмірності із застосуванням комп'ютерної техніки, вони пов'язані: з великим об'ємом оперативної пам'яті комп'ютера, необхідної при проведенні розрахунків із матрицею; великий об'єм самих розрахунків; матриця системи може бути виродженою; накопичення помилок обчислення. Великий об'єм самих розрахунків приводить до того, що для розв'язання задачі необхідно багато часу. Також при цьому відбувається накопичення похибок обчислення, що приводить до неправильного результату. Для вирішення цих проблем застосовують деякі прийоми та спеціальні чисельні методи.

Однією із проблем, що розв′язуються за допомого сучасної обчислювальної математики, є наближення функцій однієї змінної та багатьох дійсних змінних іншими функціями більш простої, взагалі кажучи будови. Інша назва цієї задачі – апроксимування функції.

Із розвитком комп'ютерної техніки значно розвинулись і числові методи. При цьому важливу роль відіграє теорія наближення функції, оскільки на ній базуються алгоритми побудови апроксимаційних поліномів, що дає можливість, наприклад, будувати квадратурні формули. Для студентів цікавими виявилися завдання на побудову власних формул наближених обчислень визначених інтегралів. Широким полем для навчально-дослідницької роботи може бути використання формули Гаусса $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(k)$. Власну формулу студент може вивести, вибравши довільні вузли x_k, або вузли спеціальних функцій, дослідити, отримати оцінку точності формули. Далі ці результати дослідження можуть застосовуватися під час розв'язування крайових задач диференціальних рівнянь.

Однією із вимог до числових методів раціональної апроксимації є надійність. Не завжди існує раціональна функція певного виду, що задовольняє накладеним умовам інтерполяції. Якщо метод апроксимації надійний, то програма має вказати, що задача не має розв′язку. Числовий алгоритм повинен розрізняти задачі що мають і не мають розв′язків з врахуванням помилок представлення та округлення. Аналіз цього питання приводить нас до поняття стійкості алгоритму, яке тісно пов′язане з поняттям надійності. Алгоритм стійкий, якщо малі зміни початкових даних приводять до невеликих змін результату. Хороший алгоритм раціональної інтерполяції повинен бути в змозі виділити ті випадки, коли початкові дані приводять до нестійкого результату.

Студентів слід ознайомити з постановкою задачі наближення функцій, сутністю методів наближення (інтерполювання, середнє квадратичне наближення, рівномірне наближення), оптимальним добором вузлів інтерполювання, найпростішими інтерполяційними методами для розв'язування рівнянь з одним невідомим.

До переліку фундаментальних компетентностей загальнокультурного розвитку людини відносять математичну компетентність, під якою розуміють перетворення реальної проблеми у математичну (математичне моделювання), тлумачення математичних об'єктів або інформації щодо змодельованих ситуацій. Одним із недоліків моделювання є те, що будь-який модельний аналіз звужує зміст можливих тлумачень результату. Моделювання висвітлює про об'єкт рівно стільки, скільки можна "втиснути" в рамки моделі, що було названо "прокрустовим ложем" моделювання.

Наведемо перелік компетентностей, що входять до складу математичної компетентності фахівців та тісно пов'язані із змістом статті:

– здатність здійснювати пошук, критичний аналіз та синтез інформації, застосовувати системний підхід для вирішення поставлених завдань;

– здатність застосовувати природничі та загальноінженерні знання, методи математичного аналізу та моделювання, теоретичного та експериментального дослідження у професійній діяльності;

– здатність представляти та захищати свої математичні розв'язки.

Прикладом формування наведених компетентностей може бути розв'язання задачі Коші,

$$y' + ycos(x) = exp(-sin(x)),\ y(0) = 2$$

$$y = (x + C)\ e^{-\sin x},\ \ y = (x + 2)\ e^{-\sin x}$$

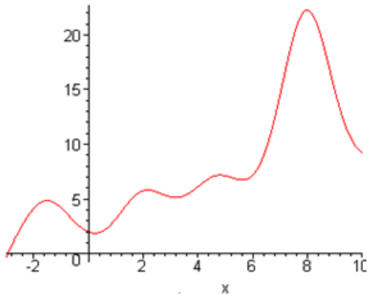

Рисунок 1 – Графік частинного розв'язку

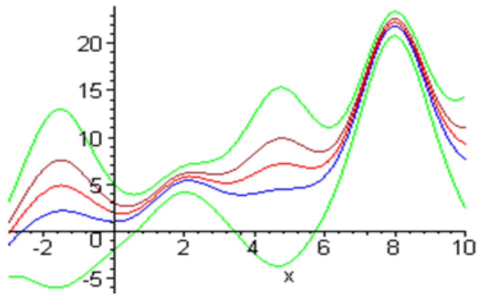

Рисунок 2– Графік загального розв'язку

Студент доповідає власний аналіз відповідного процесу за результатом побудови фрагмента відповідної інтегральної кривої (рис. 1) та спробу передбачити, якими будуть інші інтегралі криві. Важливо проаналізувати зміст загальних та частинних розв'язків. Зміст загального розв'язку (звичайно, на множині побудованих графіків) дозволяє з'ясувати особливості динаміки процесу, виявити його поведінку в околі деяких точок. Аналіз таких ситуацій дозволяє усвідомити студентам значення математичного моделювання. Так, графік частинного розв'язку (рис. 1) вказує на наявність значної кількості екстремумів, і в той же час графіки загального розв'язку (рис. 2) інакше характеризують процес в околі деяких точок (точка max змінюється на точку min. Такий підхід до навчання математики формує здатність тлумачити інформацію, подану математичним способом, точно використовувати математику для передачі інформації та розв'язування задач, що розвине навички спілкування студентів мовою математики. Отже, вивчення математики в соціальному контексті дає змогу студентам посилити знання, необхідні в ситуаціях на робочому місці, і забезпечує кращу відповідність математики, необхідної в інженерній практиці.

Слід підкреслити загальну тенденцію розвитку математичних моделей реальних процесів, що намітилася останніми роками – їх суттєво нелінійний характер та підвищення порядку відповідних диференціальних рівнянь. Одним з механізмів підвищення порядку диференціальних рівнянь, що описують динамічні системи, є урахування зворотного впливу середовища на рух динамічної системи. Такий, наприклад, механізм появи похідних третього порядку у рівняннях електродинаміки. Тому актуальною є проблема створення та ознайомлення студентів з числово-аналітичними комп'ютерними методами дослідження і математичного моделювання цих процесів з урахуванням можливого змінювання їх параметрів.

Як відомо, немає досить ефективних та загальних методів аналітичного дослідження поведінки нелінійних систем, що описуються задачею Коші. Застосування методів якісної теорії диференціальних рівнянь вимагає, по-перше, автономності системи, а, по-друге, зі збільшенням числа ступенів свободи системи, складність дослідження за допомогою якісної теорії диференціальних рівнянь, а тим більше їх візуалізації, різко зростає. Фактично, єдиним надійним методом дослідження багатьох нелінійних систем є наближене розв'язування задачі Коші, що зводиться, зазвичай, до числового інтегрування нормальної системи ОДУ з відповідними початковими умовами. Але поряд з числовими методами застосовують наближені числово-аналітичні методи, що ґрунтуються, зокрема, на інтегральному перетворенні Лапласа або на сплайновій экстраполяції числових розв'язків задачі Коші [15].

Необхідність застосування досить складних числових методів, і пов'язана з цією обставиною необхідність професійного програмування, складність маніпуляцій з числовим розв'язанням, зокрема, складності візуалізації динаміки нелінійних динамічних систем є сукупним фактором, що різко обмежує область досліджуваних нелінійних систем, як математикам, так і фахівцям, які не є професійними програмістами.

Системи комп'ютерної математики, в принципі, помітно наближають таких фахівців до застосування методів комп'ютерного моделювання, але все ж таки тут стосовно дослідженню систем нелінійних ОДУ для таких фахівців зберігається помітна диспропорція між витраченими зусиллями та отриманням результату.

Крім того, оскільки комп'ютерне, числове моделювання використовує практично весь апарат сучасної математики, передбачається наявність знань з основних математичних дисциплін – алгебри, математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики, теорії імовірності. Для вирішення математичних завдань необхідно володіти в повному обсязі числовими методами розв'язання нелінійних рівнянь, систем лінійних рівнянь, диференціальних рівнянь, елементами функціонального аналізу, теорії наближення функції тощо. І, звичайно ж, передбачається вільне володіння сучасними інформаційними технологіями, знаннями мов програмування й володіння навичками розробки прикладних програм.

Добір змісту понять числового моделювання, що розглядаються у курсі вищої математики ґрунтувався також на загально дидактичних принципах. Так, згідно принципу доступності передбачався змістовий аналіз наявних і засвоюваних знань та умінь студентів, а також урахування "зони найближчого розвитку студента". Важливим фактором добору матеріалу було урахування рівня загальної підготовки студентів з курсу вищої математики, інформатики, фізики, оскільки це значно впливає на рівень опанування методологією моделювання.

Можна виділити наступні вимоги добору та подання теоретичного матеріалу курсу вищої математики: диференціація змісту; модульність; діалогова форма пояснення; надлишок інформації, необхідної для виконання завдань студентом; опосередковане керування роботою через текст (наголоси на основних положеннях теорії, її структурних зв'язках, формулювання правил тощо); використання наочності; виважена організація діяльності зі знаково-символьними засобами; висвітлення міжпредметних зв'язків; використання історичних відомостей щодо змісту тощо. На нашу думку, кожен наступний рівень розкриття змісту курсу вищої математики у поєднанні з елементами числового моделювання повинен мати вищий рівень науковості, абстрактності, проблемності.

На даний момент рівень математичної підготовки для багатьох спеціальностей інженерії потребує обов’язкових (глибоких) знань з таких розділів математики: основи матричного числення, основи інтегральних рівнянь, основи варіаційного числення, основи функціонального аналізу, основи математичних методів дослідження диференціальних рівнянь, основи математичного моделювання та багатьох інших. У зв’язку з цим потребує розширення наведених у статті понять числового моделювання та поглиблення їх змісту за рахунок введення в курс вищої математики понять наведених вище розділів.

Складнішими за технічною реалізацією і більш універсальними за можливостями є символьні, або аналітичні методи СКМ. Робота символьного процесора пов'язана з аналізом формули, що перетворюється, а це дозволяє, наприклад, під час інтегрування отримати відповідь у вигляді не тільки десяткового дробу, як у випадку застосування числового методу, а й у вигляді первісної. Крім того, символьні результати є абсолютно точними. Загалом, з упевненістю можна сказати, що за всіма параметрами аналітичний розв'язок в СКМ перевищує числові. Проте, на жаль, можливості використання символьних процесорів є дуже обмеженими, тому що для небагатьох задач можна отримати аналітичний розв’язок, а, крім того, не до всіх задач можна застосувати програми символьних перетворень.

Розглянемо деякі аспекти технології запропонованого інтегративного навчання вищої математики з елементами числового моделювання.

На лекції, на практичних заняттях викладач може використати побудовані математичні моделі для демонстрації явища, що розглядається. У процесі моделювання конкретного явища студент не тільки засвоює навчальний матеріал, але й набуває вміння ставити проблеми й завдання, передбачати результати дослідження, проводити оцінювання, виділяти головні й другорядні фактори для побудови моделей, вибирати аналогії й математичні формулювання, проводити аналіз обчислювальних експериментів.

Компетентністний підхід до навчання вищої математики, з урахуванням введених понять числового моделювання, визначається зв'язками між набутими математичними знаннями й вміннями та професійними компетентностями: здатність здійснювати пошук, критичний аналіз та синтез інформації, застосовувати системний підхід для вирішення поставлених завдань; здатність застосовувати природничі та загальноінженерні знання, методи математичного аналізу та моделювання, теоретичного та експериментального дослідження у професійній діяльності; здатність вирішувати стандартні завдання професійної діяльності на основі інформаційної та бібліографічної культури із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій.

Особливу значимість несе формування комплексу компетентнісно-орієнтованих завдань у кожному модулі, вирішення яких вимагає встановлення різноманітних інтеграційних зв'язків інформатичних і математичних дисциплін. Кількість навчальних завдань, поставлених у кожному модулі, відповідає кількості елементів знань, які контролюються і оцінюються.

При доборі змісту враховуємо технологію професійної спрямованості вивчення курсу вищої математики, що реалізується у таких напрямках: методологічна насиченість змісту курсу вищої математики, що розвиває науковий світогляд студентів, методологічні знання, уміння реалізації функцій фахівця у професійній діяльності; міждисциплінарна взаємодія навчальних дисциплін, що дозволяє розкрити сутність вищої математики у якісному засвоєнні спеціальних інформатичних дисциплін, а також у майбутній професійної діяльності; використання комплексу навчально-професійних завдань, вирішення яких істотно впливає на мотивацію вивчення кусу вищої математики [4].

Побудова системи задач для інтегрованих занять ґрунтується також на принципах диференційованої реалізованості, систематичності і послідовності навчання. При цьому навчальна діяльність студентів спрямовується на засвоєння загальних способів дій і наукових понять під час розв’язання задач. У процесі засвоєння понять курсу вищої математики та числового моделювання викладач навчає студентів перетворюванню логічної форми наукових знань у форму діяльності. Зокрема діяльність студентів спрямовується на здобуття системних знань щодо математики та числового і комп’ютерного моделювання в математиці, знань, що стосуються добору методів математичного моделювання, оцінювання похибок, стійкості методів, алгоритмів, застосування СКМ. До системи задач включались задачі, методи та алгоритми розв'язування яких відомі студентові, задачі проблемного характеру, що потребують розробки відповідних алгоритмів, проведення числового і комп'ютерного моделювання, аналізу отриманих результатів.

Оцінювання рівня досягнень результатів навчання здійснювалось за допомогою банку компетентнісно-орієнтованих тестових завдань, що дозволяє вести моніторинг сформованості професійних і спеціальних компетентностей майбутніх фахівців.

Крім того, оволодіння навичками уміння числового моделювання зорієнтовано на здоровий глузд студентів, їхній рівень мислення, кмітливість. Ми виходили з того, що під час знайомства з поняттями числового моделювання під час вивчення курсу вищої математики студенти можуть оволодіти простими питаннями комп'ютерного моделювання, що дозволить їм набути певного досвіду розв'язування конкретних прикладних задач, мати загальне уявлення та розвинути необхідну інтуїцію пошуку ефективних шляхів побудови результату числового моделювання. Мета та завдання практичних занять полягали у поглибленні та закріпленні теоретичних знань з основного курсу вищої математики, необхідних під час вивчення інформатики та комп'ютерної техніки, набуття навичок їх практичного застосування до розв'язування конкретних задач; набуття знань та вмінь наукового дослідження в рамках навчально-дослідного завдань; вдосконаленні вмінь та навичок побудови алгоритмів; формуванні вмінь професійного використання методів і засобів опрацювання інформації, СКМ (конкретно MathCAD, Maple), інноваційних методів та методик розв'язування задач.

Висновки

Висновок перший. Пропонується формування змісту курсу вищої математики здійснювати у таких напрямках: підсилення ролі числових методів і їх реалізацію за допомого СКМ; використання математичного моделювання під час розв'язування прикладних задач; оволодіння студентами математичними змістово-фаховими знаннями, необхідними для аналітичного і числового моделювання практичних інженерних задач, створення власних бібліотек користувача програмних продуктів.

Висновок другий. Згідно із пропонованою методикою навчання, формування системи завдань повинно відповідати типу діяльності, визначеному серед інших – математичному моделюванню природничих, технічних, екологічних та суспільних явищ і процесів. Студенти поглиблюють навички створення математичної моделі, її дослідження за допомогою комп'ютерного моделювання. Комп'ютерне моделювання у математиці переконливо доводить студентам, що математичні конструкції – це моделі реальних відношень. А це змінює відношення студентів до математики, навчання стає осмисленим та продуктивнішим, у них формуються мотиваційні чинники щодо опанування та поглиблення знань із різних галузей науки, зокрема можливістю оволодіння навичками використання СКМ. Студенти поглиблюють уявлення про весь технологічний ланцюг розв'язання задачі. Що стосується прикладного дослідження в галузі математики, студенти навчаються вибору та використанню алгоритмів, методів, прийомів і способів розв'язування математичних задач з використанням комп'ютерних засобів. При цьому розглядаються задачі математичного моделювання за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, задачі на побудову регресії, вибору оптимальної регресії, задачі на оцінювання похибок у різних нормованих просторах, та інших типів задач.

Висновок третій. Виділено головні вміння й навички, які можуть бути сформовані у студентів під час інтегрованих занять з вищої математики і елементів числового моделювання: уміння використовувати необхідні програмні засоби в середовищі СКМ*;* уміння зіставляти результати в різних формах подання (аналітичне й графічне подання); уміння використовувати нові можливості, що надаються комп'ютерними технологіями, заснованими на використанні середовища СКМ; уміння проектувати в середовищі СКМ програмні засоби першого рівня складності для розв'язування навчальних і предметних завдань.

Список літератури

[1] Ю. Горошко, "Система інформаційного моделювання у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики," дис. д-ра пед. наук, Чернігівський нац. пед. ун-т імені Т. Г. Шевченка, Чернігів, 2013.

[2] Т. П. Кобильник, "Вивчення елементів програмування у системі комп'ютерної математики Maxima," *Молодь і ринок: щомісячний науково-педагогічний журнал,* № 5-6 (28-29), с. 159-163. 2007.

[3] С. А. Кирилащук, В. І. Клочко, З. В. Бондаренко, "Технологічний підхід до формування математичної компетентності фахівців галузі ІТ," *Modern education, training and upbringing: collective monograph,* International Science Group. Boston: Primedia eLaunch, c. 453-467. 2021. doi: 10.46299/ISG.2021.MONO.PED.I

[4] З. В. Бондаренко, В. І. Клочко, С. А.Кирилащук, "Інтегративний підхід до формування професійних компетенцій майбутніх інженерів шляхом використання засобів математичного моделювання," *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. пр.*, № 46, с. 114-117. 2016.

[5] С. О. Семеріков, *Maxima 5.13: довідник користувача*. Ред. Академіка АПН М. І. Жалдака. Київ, 2007.

[6] І. О. Теплицький, *Елементи комп'ютерного моделювання: навчальний посібник*. Кривий Ріг. КДПУ, 2005.

[7] Developing 21st Century Competencies in the Mathematics ClassroomYearbook 2016, Association of Mathematics Educators, Edited by: Pee ChoonToh (NTU, Singapore), Berinderjeet Kaur (NTU, Singapore).

[8] Ministry of Education, Singapore (2010). MOE to enhance learning of 21st century competencies and strengthen art, music and physical education. Available at: www.moe.gov.sg.

[9] Turner, R., (2010) Exploring mathematical competencies. Available at: http://research.acer.edu.au/resdev/vol24/iss24/5.

[10] І. В. Сітак, В. М. Давиденко, "Організація математичної підготовки майбутніх інженерів у вищому технічному навчальному закладі," *Scientific journal «Virtus»*, № 2, с. 139-142. 2015.

[11] В. М. Михалевич, *Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Ч. 1. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія*, Вінниця, Україна: ВНТУ, 2004.

[12] B. A. Alpers, *Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education.* A Report of the Mathematics Working Group. Brussels: European Society for Engineering Education, 2013.

[13] Ю. С. Рамський, К. І. Рамська, "Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві," *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. *Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наукових праць*: НПУ, № 6 (13), с. 12-16. 2008.

[14] К. Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц, *Комп'ютерні методи прикладної математики*, 2002.

[15] З. В. Бондаренко, С. А. Кирилащук, "Аспекти формування математичної та інформатичної компетентності у майбутніх фахівців з інформаційних технологій," *Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності,* Вінниця, 2018, с. 343-344.

Стаття надійшла: 18.07.2022.

References

[1] Yu. Horoshko, "Systema informatsiinoho modeliuvannia u pidhotovtsi maibutnikh uchyteliv matematyky ta informatyky," dys. d-ra ped. nauk, Chernihivskyi nats. ped. un-t imeni T.H. Shevchenka, Chernihiv, 2013 [in Ukrainian].

[2] T. P. Kobylnyk, "Vyvchennia elementiv prohramuvannia u systemi kompiuternoi matematyky Maxima," Molod i rynok: shchomisiachnyi naukovo-pedahohichnyi zhurnal, № 5-6 (28-29), s. 159-163. 2007 [in Ukrainian].

[3] S. A. Kyrylashchuk, V. I. Klochko, Z.V. Bondarenko, "Tekhnolohichnyi pidkhid do formuvannia matematychnoi kompetentnosti fakhivtsiv haluzi IT," Modern education, training and upbringing: collective monograph, International Science Group. Boston: Primedia eLaunch, s. 453-467. 2021. doi: 10.46299/ISG.2021.MONO.PED.I [in Ukrainian].

[4] Z. V. Bondarenko, V. I. Klochko, S. A. Kyrylashchuk, "Intehratyvnyi pidkhid do formuvannia profesiinykh kompetentsii maibutnikh inzheneriv shliakhom vykorystannia zasobiv matematychnoho modeliuvannia," Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy. Zb. nauk. pr., № 46, s. 114-117. 2016 [in Ukrainian].

[5] S. O. Semerikov, *Maxima 5.13: dovidnyk korystuvacha*. Red. Akademika APN M. I. Zhaldaka. Kyiv, 2007 [in Ukrainian].

[6] I. O. Teplytskyi, *Elementy kompiuternoho modeliuvannia: navchalnyi posibnyk*. Kryvyi Rih. KDPU, 2005 [in Ukrainian].

[7] Developing 21st Century Competencies in the Mathematics ClassroomYearbook 2016, Association of Mathematics Educators, Edited by: Pee ChoonToh (NTU, Singapore), Berinderjeet Kaur (NTU, Singapore).

[8] Ministry of Education, Singapore (2010). MOE to enhance learning of 21st century competencies and strengthen art, music and physical education. Available at: www.moe.gov.sg.

[9] Turner, R., (2010) Exploring mathematical competencies. Available at: http://research.acer.edu.au/resdev/vol24/iss24/5.

[10] I. V. Sitak, V. M. Davydenko, "Orhanizatsiia matematychnoi pidhotovky maibutnikh inzheneriv u vyshchomu tekhnichnomu navchalnomu zakladi," *Scientific journal «Virtus»,* № 2, s. 139-142. 2015 [in Ukrainian].

[11] V. M. Mykhalevych, *Maple. Kompiuterna pidtrymka kursu vyshchoi matematyky v tekhnichnomu vuzi. Ch. 1. Liniina y vektorna alhebra. Analitychna heometriia*, Vinnytsia, Ukraina: VNTU, 2004 [in Ukrainian].

[12] B. A. Alpers, Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. A Report of the Mathematics Working Group. Brussels: European Society for Engineering Education, 2013.

[13] Yu. S. Ramskyi, K. I. Ramska, "Pro rol matematyky i deiaki tendentsii rozvytku matematychnoi osvity v informatsiinomu suspilstvi," *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia № 2. Kompiuterno-oriientovani systemy navchannia: zb. naukovykh prats: NPU*, № 6 (13), s. 12–16. 2008 [in Ukrainian].

[14] K. Kh. Zelenskyi, V. M. Ihnatenko, O. P. Kots, *Kompiuterni metody prykladnoi matematyky*, 2002 [in Ukrainian].

[15] Z. V. Bondarenko, S. A. Kyrylashchuk, "Aspekty formuvannia matematychnoi ta informatychnoi kompetentnosti u maibutnikh fakhivtsiv z informatsiinykh tekhnolohii," Mizhnarodna naukovo-metodychna Internet-konferentsiia «Problemy vyshchoi matematychnoi osvity: vyklyky suchasnosti, Vinnytsia, 2018, s. 343-344 [in Ukrainian].

Відомості про авторів

Кирилащук Світлана Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії.

Бондаренко Злата Василівна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики.

Клочко Віталій Іванович – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри вищої математики.

Кирилащук Тетяна Генадіївна – викладач кафедри комп'ютерних наук.

S. A. Kyrylashchuk, Z. V. Bondarenko, V. I. Klochko, T. G. Kyrylashchuk

NUMERICAL MODELING AS ONE OF THE COMPONENTS OF FUNDAMENTAL MATHEMATICAL TRAINING OF ENGINEERS

Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia