МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 004.92

Є. О. Башков[1], Д. Т. Обідник[2]

МЕТОД КОДОВОЇ ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ВІДРІЗКІВ ПРЯМИХ

[1]Донецький національний технічний університет, м. Луцьк
[2]Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Анотація. Графічні зображення формують з використанням графічних примітивів. Це найменші, неподільні з точки зору прикладних програм, графічні елементи, що використовуються як базові для побудови більш складних зображень. Серед графічних примітивів найбільшу питому вагу мають відрізки прямих, для формування яких використовують лінійну інтерполяцію. Продуктивність формування графічних сцен залежить від часу генерації векторів, тому питання підвищення продуктивності лінійної інтерполяції є актуальними, особливо для генерації динамічних зображень. Із застосуванням матричних екранів і матричних виконавчих органів у пристроях реєстрації з'являється можливість однотактного відтворення елементів рядка чи стовпця, що дозволяє істотно підвищити швидкодію цих пристроїв. Такий режим роботи є перспективним. Його організація вимагає розробки методів інтерполяції, які дозволяють в одному інтерполяційному такті одержувати код приросту в рядку чи стовпці (кодова інтерполяція).
Запропоновано метод кодової лінійної інтерполяції, особливість якого полягає визначені в кожному інтерполяційному такті цифрових сегментів, який включає кількість однотипних приростів з однаковою ординатою (абсцисою). Для цього в циклі підготлвки до інтерполяції ділиться більший приріст відрізка прямої на менший. У подальшому це відношення і залишок від ділення використовується для визначення цифрових сегментів У запропонованому методі накопичується залишок від ділення більшого приросту на менший за модулем, який дорівнює меншому приросту. Це дозволяє виключити накопичення похибки іта забезпечує попадання в кінцеву точку відрізка прямої. Максимальна похибка інтерполяції при цьому не перевищує половини кроку дискретизації, що обумовлено симетрією похибки. Запропоновано алгоритм кодової лінійної інтерполяції. Проведені в роботі дослідження можна використати для побудови високопродуктивних засобів комп'ютерної графіки.
Ключові слова: лінійна інтерполяція, крокова траєкторія, генератор векторів, матричний екран, похибка інтерполяції, кодова інтерполяція, графічні зображення, графічні примітиви.

Abstract. Graphic images are formed using graphic primitives. These are the smallest, indivisible from the point of view of application programs, graphic elements used as the basis for building more complex images. Among the graphic primitives, the segments of straight lines, for the formation of which provides linear interpolation, have the highest specific weight. The performance of forming a graphic scene depends on the time of vector generation, therefore the question of increasing the performance of linear interpolation is relevant, especially for dynamic images. With the use of matrix screens and matrix executive bodies in registration devices, the possibility of one-stroke reproduction of row or column elements appears, which allows you to significantly increase the speed of these devices. This mode of operation is promising. Its organization requires the development of interpolation methods that allow in one interpolation cycle to receive the increment code in a row or column (code interpolation). A coded linear interpolation method is proposed, the feature of which is determined in each interpolation clock of digital segments, which includes the number of increments of the same type with the same ordinate (abscissa). For this cycle, prepare for interpolation a larger increment of the line segment to a smaller one. In the future, this ratio and the remainder of the division are used to determine digital segments. In the proposed method, the remainder of the division of a larger increment by a smaller one is accumulated, which is equal to the smaller increment. This allows you to eliminate the accumulation of error and ensure that the end point of the straight line segment is reached. The maximum interpolation error in this case does not exceed half of the discretization step, which is due to the symmetry of the error. The code linear interpolation algorithm is proposed. The research carried out in the work can be used to build high-performance computer graphics tools.
Key words: linear interpolation, step trajectory, vector generator, matrix screen, interpolation error, code interpolation, graphic images, graphic primitives.

DOI: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2023-57-2-87-92.

Вступ

Із застосуванням матричних екранів та матричних виконавчих органів у пристроях реєстрації з'являється можливість однотактного відтворення елементів рядка чи стовпця, що дозволяє істотно підвищити швидкодію цих пристроїв. Такий режим роботи є перспективним. Його організація вимагає розробки методів інтерполяції, які дозволяють в одному інтерполяційному такті одержувати код приросту в рядку чи стовпці (кодова інтерполяція). Це дає можливість підвищити продуктивність лінійної інтерполяції при формуванні зображень в матричних пристроях.

Аналіз літературних джерел

Відрізки прямих є найпоширенішими графічними елементами [1-3]. Для їх реалізації найбільшого поширення отримали: метод цифрового диференційного аналізатора (ЦДА) [4] і метод оцінювальної функції [4].

Метод ЦДА [4] розкладання відрізка в растр полягає у розв'язку диференціального рівняння, що описує цей процес. Для прямої лінії маємо

$$\frac{dy}{dx} = const \quad або \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

де y_2, y_1, x_2, x_1 - координати вершин відрізка прямої.

Тому

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Delta x$$

При апаратній реалізації методу ЦДА використовують двійковий підмножувач, який формує за цикл його роботи кількість імпульсів, що дорівнює вхідному коду. Структурна схема генератора векторів, який використовує метод цифрового диференційного аналізатора, включає два двійкові підмножувачі та два регістри для зберігання координатних приростів відрізка прямої. Такий інтерполятор при простоті апаратної реалізації має суттєві недоліки – низьку точність відтворення відрізків прямих і формування векторів різної довжини за один і той же час.

Недоліки методу ЦДА [4]:

-використання операцій із плаваючою крапкою та операцій множення або ділення в циклі обумовлює малу швидкість обчислень, хоча це суттєво залежить від процесора (у сучасних комп'ютерах, де процесори використовують ефективні засоби прискорення, наприклад, конвеєр арифметичних операцій із плаваючою крапкою, час виконання цілочислових операцій не набагато менший);

- при обчисленні координат шляхом додавання приросту може накопичуватись похибка обчислення координат.

У методі оцінювальної функції [4] використовують спеціальну функцію, що визначає положення точок траєкторії відносно відрізка прямої. Ця функція вище відрізка прямої більша нуля, а нижче – менша нуля. У випадку, коли точка траєкторії належить відрізку прямої оцінювальна функція дорівнює нулю. При інтерполюванні виконують такі крокові переміщення, що змінюють знак оцінювальної функції.

Оцінювальна функція в загальному випадку має вигляд

$$O\Phi_i = y_i \Delta x - x_i \Delta y,$$

де $\Delta x,\ \Delta y$ - координатні прирости відрізка прямої, x_i, y_i - поточні координати точки крокової траєкторії.

При виконання горизонтального приросту типу $x_{i+1} = x_i + 1$ оцінювальна функція має такий вигляд

$$O\Phi_{i+1} = O\Phi_i - \Delta y.$$

При виконанні вертикального приросту $y_{i+1} = y_i + 1$ оцінювальну функцію розраховують за виразом

$$O\Phi_{i+1} = O\Phi_i + \Delta x.$$

Діагональний крок передбачає одночасне виконання горизонтального та вертикального переміщення, що передбачає сумісний розрахунок двох наведених виразів.

При розрахунку оцінювальної функції не виконуються довготривалі мікрооперації множення та ділення, що забезпечує високу продуктивність формування крокової траєкторії з максимальною точністю. Саме тому метод оцінювальної функції є найпоширенішим.

Недоліком методу є інкрементний характер формування крокової траєкторії, що обмежує його використання в пристроях з матричними екранами, в яких можливо формування цілого сегменту пікселів.

Мета статті – розробка методу кодової лінійної інтерполяції для формування відрізків прямих.

Розробка методу кодової лінійної інтерполяції

Із застосуванням матричних екранів і матричних виконавчих органів у пристроях реєстрації з'являється можливість однотактного відтворення елементів рядка чи стовпця, що дозволяє істотно підвищити швидкодію цих пристроїв. Його організація вимагає розробки методів інтерполяції, які дозволяють в одному інтерполяційному такті одержувати код приросту у рядку чи стовпці (кодова інтерполяція).

Визначення приростів базується на попередньому діленні більшого приросту на менший з виділенням цілої і дробової частини. При цьому в процесі інтерполяції ціла частина від ділення видається на вихід інтерполятора з урахуванням переповнення суматора, який накопичує дробову частину. Однак точність такого методу недостатня, тому що максимальна похибка інтерполяції наближається до кроку дискретизації, у той час як застосування суматора довільного модуля з попередньою початковою установкою дозволяє зменшити максимальну похибку до половини кроку дискретизації. Крім цього, зазначений метод не забезпечує попадання в кінцеву точку через те, що не завжди можливе точне ділення більшого приросту на менший. Це вимагає розробки методу, який дозволяє підвищити точність кодової інтерполяції відрізків прямих.

Нехай відрізок прямої заданий приростами координат Δx і Δy. Для визначеності обмежимося випадком, коли початок відрізка збігається з початком координат, відрізок розташований у першому октанті першого квадранта (Δx>0, Δy≥0, Δx≥Δy). Всі інші нахили можна одержати заміною координатних осей і зміною знаків приростів.

Якщо Δy=0, то приріст по координаті x дорівнює Δx.

Розглянемо випадок, коли Δy>0. Визначимо кількість приростів одиничної довжини по координаті x, яка приходиться на один приріст по координаті y

$$\Delta x / \Delta y = k + g\,, \tag{1}$$

де k – ціла частина від ділення; g – дробова частина. Рівняння прямої з нахилом Δy/Δx, яка проходить через початок координат, має вигляд

$$y = x(\Delta y/\Delta x).$$

Для прямої, зміщеної на 1/2 вниз по осі y відносно відтворюваної прямої з тим же нахилом, маємо

$$y_i = x_i(\Delta y / \Delta x) - 1/2$$

$$x_i = (y_i + 1/2)(\Delta x/\Delta y). \tag{2}$$

З виразу (2) можна визначити абсциси точок перетину прямої, зміщеної вниз по осі y відносно відтворюваної прямої на 1/2, яка має той же нахил, із прямими, що представляють рядки, підставляючи замість y_i номер рядка. В першому рядку (y_0=0). З (1) і (2) одержуємо

$$x_0 = (1/2)(k+g)\,. \tag{3}$$

x_0 можна представити як суму

$$x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + \lceil x_0 \rceil, \tag{4}$$

де $\lfloor\ \rfloor$ і $\lceil\ \rceil$ – оператори виділення цілої і дробової частини.

З (3) і (4) випливає

$$\lfloor x_0 \rfloor = (1/2)\cdot k, \quad \lceil x_0 \rceil = (1/2)\cdot g \qquad \text{для парного k;}$$

$$\lfloor x_0 \rfloor = \lfloor (1/2)\cdot k \rfloor, \quad \lceil x_0 \rceil = 1/2 + (1/2)\cdot g \qquad \text{для непарного } k, \tag{5}$$

У i-му рядку $x_i = \lfloor x_i \rfloor + \lceil x_i \rceil$, звідки

$$\lfloor x_i \rfloor = x_i - \lceil x_i \rceil. \tag{6}$$

Із (1) і (2) для ($i+1$)-го рядка випливає

$$x_{i+1} = (y_i + 1 + 1/2)(k+g). \tag{7}$$

Визначимо черговий приріст $П_{i+1}$ у ($i+1$)-му рядку. Враховуючи (1), (2), (6) і (7), маємо

$$x_{i+1} - \lfloor x_i \rfloor = k + g + \lceil x_i \rceil. \tag{8}$$

Ціла частина (8) є Пі+1, а дробова використовується при визначенні Пі+2, тому що вона дорівнює $\lceil x_{i+1} \rceil$.

Точка ($\lfloor x_i \rfloor, y_i$), яка лежить у зоні між початковою прямою і прямою, зміщеною відносно початкової по y вниз на 1/2 з тим же нахилом, відхилена від відтворюваної прямої не більше ніж на 1/2. Отже, відхилення точки ($\lfloor X_i \rfloor, y_{i+1}$) перевищить 1/2. Із урахуванням цього при переході від одного рядка до іншого варто виконувати діагональний крок.

Останній інтерполяційний крок, який приводить у кінцеву точку, виконується в рядку Δy. Приріст П Δy визначається виразом

$$П_{\Delta y} = \Delta x - x_{\Delta y - 1} + \lceil x_{\Delta y - 1} \rceil . \quad (9)$$

З (1), (2) і (9) випливає, що

$$П_{\Delta y} = (1/2)k + (1/2)g + \lceil x_{\Delta y - 1} \rceil \quad (10)$$

Враховуючи, що не завжди можливе точне ділення більшого приросту на менший, щоб уникнути накопичення похибки в процесі інтерполяції, представимо g і $\lceil x_i \rceil$ у вигляді

$$g = ЗАЛ / \Delta y; \qquad \lceil x_i \rceil = ЗАЛ_i / \Delta y , \quad (11)$$

де ЗАЛ – залишок від ділення більшого приросту на менший.

З урахуванням (11) перепишемо (5), (8) і (10):

$$\lfloor x_0 \rfloor = \lfloor (1/2) \cdot k \rfloor; \qquad \lceil x_0 \rceil = ЗАЛ_0 / \Delta y , \quad (12)$$

$$x_{i+1} - \lfloor x_i \rfloor = k + (ЗАЛ_i + ЗАЛ) / \Delta y , \quad (13)$$

$$П_{\Delta y} = (1/2)k + (ЗАЛ_{\Delta y - 1} + ЗАЛ / 2) / \Delta y , \quad (14)$$

де $ЗАЛ_0 = ЗАЛ / 2$ при парному k і $ЗАЛ_0 = \Delta y / 2 + ЗАЛ / 2$ при непарному k.

Використовуючи (12), (13) і (14) можна запропонувати такий алгоритм кодової лінійної інтерполяції:

1) якщо менший приріст дорівнює нулю, то більший приріст визначає кількість одиничних приростів у рядку чи стовпці;
2) якщо менший приріст не дорівнює нулю, тоді більший приріст БП ділиться на менший приріст МП і $БП / МП = k + ЗАЛ / МП$;
3) перший приріст по координаті з більшим приростом дорівнює $[k/2]_{ЦЧ}$;
4) величина, яка визначає черговий залишок, береться рівною ЗАЛ/2 при парному k і (МП/2 + ЗАЛ/2) при непарному k;
5) з кожним інтерполяційним кроком величина, що визначає залишок, збільшується на ЗАЛ за модулем МП;
6) черговим приростом беруть одне з двох значень: k, якщо результат виконання п. 5 менший 1, і k+1 в протилежному випадку;
7) останній приріст дорівнює цілій частині суми $\lfloor k/2 \rfloor$ і переповнення суми за модулем МП $(ЗАЛ_{\Delta y - 1} + ЗАЛ / 2)$ при парному k і $(ЗАЛ_{\Delta y - 1} + ЗАЛ / 2 + МП / 2)$ при непарному k;
8) кількість інтерполяційних кроків дорівнює меншому приросту, збільшеному на 1;
9) при відтворенні приростів враховується виконання діагональних кроків між рядками або стовпцями.

Наведений алгоритм характеризується тим, що в процесі інтерполяції накопичується залишок від ділення більшого приросту на менший за модулем, який дорівнює меншому приросту. Це дозволяє виключити накопичення похибки і забезпечує попадання в кінцеву точку відрізка прямої. Максимальна похибка інтерполяції при цьому не перевищує половини кроку дискретизації, що обумовлено симетрією похибки. Точність модифікованого методу підвищується в два рази, причому додаткові апаратні витрати або витрати часу незначні через те, що модифікований алгоритм відрізняється від аналогу в основному лише формуванням початкової і кінцевої ділянок відрізка.

Приклад інтерполяції відрізка прямої (*Δx=9, Δy=2*) зображено на рис. 1.

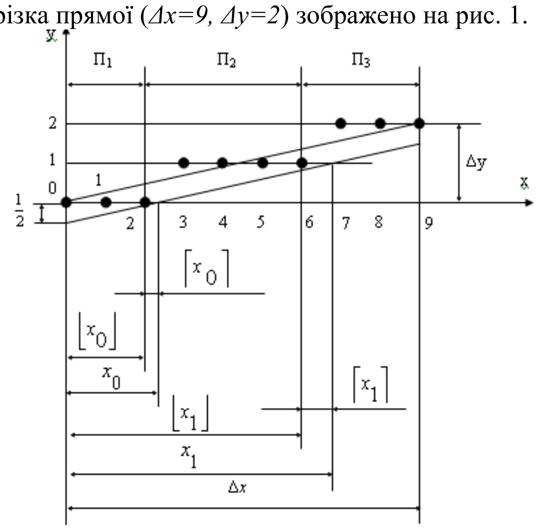

Рисунок 1 - Приклад інтерполяції відрізка прямої для $\Delta x=9$, $\Delta y=2$ при кодовій лінійній інтерполяції

Висновок

У статті розроблено метод кодової лінійної інтерполяції, який дозволяє в кожному інтерполяційному такті сформувати сегменти пікселів траєкторії відрізка прямої, які мають спільну ординату (абсцису). Для цього в циклі підготування до інтерполяції ділиться більший приріст відрізка прямої на менший. У подальшому це відношення і залишок від ділення використовується для визначення цифрових сегментів. Метод забезпечує максимальну точність інтерполяції.

Результати проведених досліджень можна використати для побудови високопродуктивних засобів комп’ютерної графіки.

Список літератури

[1] Е. А. Башков, О. А. Авксентьева и Аль-Орайкат Анас М. «К построению генератора графических примитивов для трехмерных дисплеев», В сб. *Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія "Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем*". Вип. 7 (150), с. 203-214, 2008.

[2] Анас Махмуд Аль-Орайкат, Е. А. Башков, О. В. Дубровина и др «Алгоритмический базис построения генераторов отрезков прямых для 3D дисплеїв», *Наукові праці Донецького державного технічного університету, Серія «Обчислювальна техніка та автоматизація»*. - Вип. 18 (169), с.62-70.

[3] Е. А. Башков, О. А. Авксентьева, Д. И. Хлопов, и Г. В. Войтов, «Реализация специализированного устройства генерации отрезков прямых для объемных 3d дисплеев на плис FPGA, *Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія: «Проблеми моделювання та автоматизації проектування»* № 1 (10)-2(11), с. 221-226. 2012.

[4] В. Г. Маценко, *Комп'ютерна графіка: Навчальний посібник*. Чернівці, Рута 2009.

Стаття надійшла: 29.04.2023.

References

[1] E. A. Bashkov, O. A. Avksentyeva and Al-Oraykat Anas M. «Do pobudovy heneratora hrafichnykh prymityviv dlya tryvymirnykh dyspleyiv»., U zb. Naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu, seriya "Problemy modelyuvannya ta avtomatyzatsiyi proektuvannya dynamichnykh system". Vip. 7 (150), s. 203-214, 2008.

[2] Anas Makhmud Al-Oraykat, E. A. Bashkov, O. V. Dubrovina ta in «Alhorytmichnyy bazys pobudovy heneratoriv vidrizkiv pryamykh dlya 3D dyspleyiv», Naukovi pratsi Donetskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu, Seriya «Obchyslyuvalna tekhnika ta avtomatyzatsiya». - Vip. 18 (169), s.62-70.

[3] E. A. Bashkov, O. A. Avksentyeva, D. I. Khlopov, ta H. V. Voytov, «Realizatsiya spetsializovanoho prystroyu heneratsiyi vidrizkiv pryamykh dlya ob'yemnykh 3d dyspleyiv na plis FPGA, Naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu, seriya: «Problemy modelyuvannya ta avtomatyzatsiyi proektuvannya» № 1 (10)-2(11), s. 221-226. 2012.

[4] V. H. Matsenko, Komp'yuterna hrafika: Navchalnyy posibnyk. Chernivtsi, Ruta 2009.

Відомості про авторів

Башков Євген Олександрович – доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики та інформатики Донецького національного технічного університету.

Обідник Демян Тихонович – кандидат технічних наук, доцент.

E. O. Bashkov[1], D. T. Obidnyk[2]

VECTORS CODE LINEAR INTERPOLATION METHOD FOR FORMING LINE SEGMENTS

[1]Donetsk National Technical University, Lutsk
[2]Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia